

# 熱伝導率と熱拡散率（温度伝導率）の違い

2019年5月23日 椿 耕太郎

違いの分かりにくい熱伝導率と熱拡散率（温度伝導率）についてそれぞれ詳しくみていく。熱伝導率 Thermal conductivity（単位：W/(m K)）と熱拡散率（温度伝導率、熱拡散係数、温度拡散率とも呼ばれる） Thermal diffusivity（単位：m<sup>2</sup>/s）はともに物質と状態が決まれば値が決まる物性値である<sup>脚注 1</sup>。

## 1 熱伝導率と熱拡散率の定義

熱伝導率  $k$ （単位：W/(m K)）は次式で表されるフーリエの法則で定義される。

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

熱流束  $q$ （単位：W/m<sup>2</sup>）<sup>脚注 2</sup> と温度勾配  $\frac{\partial T}{\partial x}$ （単位：K/m）<sup>脚注 3</sup> の関係において、熱伝導率  $k$ （単位：W/(m K)）が熱の伝わりやすさを示す。

熱拡散率  $a$ （単位：m<sup>2</sup>/s）は熱伝導率  $k$ （単位：W/(m K)）を比熱  $c_p$ （単位：J/(kg K)）と密度  $\rho$ （単位：kg/m<sup>3</sup>）で割ることで求められる。

$$a = \frac{k}{\rho c_p} \quad (1)$$

## 2 熱伝導率と熱拡散率の関係

熱拡散率は式 (1) の定義からでは、どのような意味を持つ値なのかがわかりにくい。熱伝導率と熱拡散率（温度伝導率）の関係を想像しやすいように、熱と温度を水槽に貯まる水の量と水位に例える。図 1 のように細長い水槽が並んでいて左から水が入り、水槽の間の壁には穴があいていて隣の水槽に水が流れ込む水槽の列を考える。流れてくる水の量が伝熱量（伝わる熱の量）に、水槽の水位の変化が温度の変化に対応する。水槽の奥行きが密度  $\rho$ （単位：kg/m<sup>3</sup>）×比熱  $c_p$ （単位：J/(kg K)）に対応し、奥行きが深いと水が貯まっても水位は変化しづらい（密度×比熱が大きいと熱が伝わっても温度が変わりにくい）。温度差が増えると伝わる熱の量も増えるように、水位の差が大きいと流れ込む水の量も増える。

熱伝導率は温度差（温度勾配）に対しての熱の伝わりやすさであり、水槽で考えると水位差に対してどれだけ水が流れ込むか、すなわち水槽の間の穴の数（大きさ）となる。それに対して熱拡散率（温度伝導率）は熱伝導率を密度×比熱で割った値であり温度の伝わりやすさを表す。水槽であれば水位の変わりやすさであり、穴の数（大

<sup>脚注 1</sup> 流体（気体と液体）の粘性を表す粘性係数（粘度） Dynamic viscosity と動粘性係数（動粘度） Kinematic viscosity の関係に近い。

<sup>脚注 2</sup> 伝わる面積を掛ければ伝熱量（単位：W）が得られる。

<sup>脚注 3</sup>  $x$  方向のみの一次元の場合

きさ) を水槽の奥行きで割った値である。穴の数が多くても水槽の奥行きが深ければ、水が多く流れ込んでも水位の変化が小さい、すなわち熱伝導率が大きくても密度×比熱が大きければ温度変化は小さい。

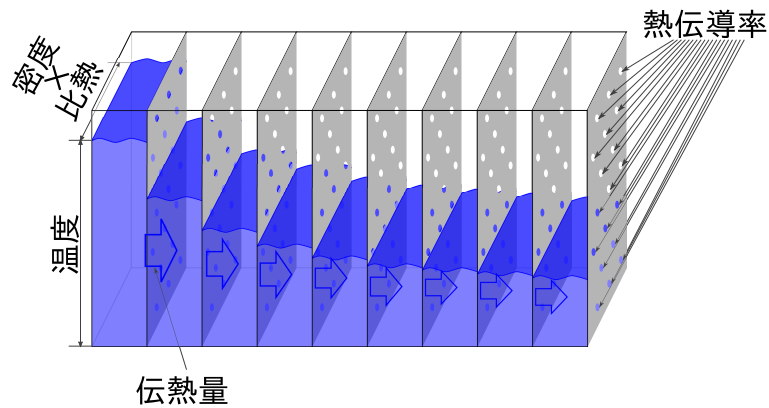


図 1 水槽での比喻

### 3 熱拡散率の意味

より詳しく熱拡散率 (温度伝導率)  $a$  (単位:  $\text{m}^2/\text{s}$ ) の意味を考えていき、等温面の伝わる速さを表すことを示す。大きな塊の固体の片面を一定温度で加熱した場合の、固体内の温度の伝わりと熱拡散率との関係を考えてみよう。大きな肉の塊を加熱されたフライパンで焼くことを想像してもよい (図 2) <sup>脚注 4</sup>。加熱された固体内部の温度の変化と熱拡散率との関係を見てみよう。まず温度分布を計算する。固体は加熱を始めるまでは温度は  $T_0$  で一定で、温度が  $T_w$  で加熱されるとする。経過時間  $t$  (単位:  $\text{s}$ ) は加熱開始を  $t = 0 \text{ s}$  とし、加熱面から垂直に座標  $x$  (単位:  $\text{m}$ ) をとり加熱面を  $x = 0 \text{ m}$  とする。この加熱される固体内の、等温面の動きを見ることで熱拡散率の意味が分かってくる。固体内の温度分布は次式のように余誤差関数  $\text{erfc}$  <sup>脚注 5</sup> で表される (詳細な導出は文末の付録 A に示す)。

$$T = T_0 + (T_w - T_0) \text{erfc} \left( \frac{2\sqrt{at}}{x} \right) \quad (2)$$

上式の  $T$  は  $\sqrt{at}/x$  の関数となっており、固体内の任意の位置  $x$  と時間  $t$  での温度が分かる。

肉を焼く例で具体的に計算してみる (図 2)。肉は初め室温で  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ 、フライパンと肉の接触面は  $T_w = 180 \text{ }^\circ\text{C}$  で加熱されるとする。肉をフライパンに置いた時間が  $t = 0 \text{ s}$ 、フライパンと肉の接触面が  $x = 0 \text{ m}$  となる。式 (2) から肉の塊 (熱拡散率  $a = 1.3 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ) を加熱した際の加熱直後、1 分後、2 分後、3 分後、4 分後、5 分後の温度分布をそれぞれ赤線で図 3 に示す。どの時刻でも左側のフライパン表面近くで温度が高く、離れるにつれて温度が下がる。また、図中で肉に火の通る (変性する)  $60 \text{ }^\circ\text{C}$  の位置を赤丸で示した。1 分後の温度分布を見る

<sup>脚注 4</sup> 焼き始めてからしばらく、肉が焼け加熱されていない面の温度が変化を始めるまでは、十分に大きな塊として扱うことができる。

<sup>脚注 5</sup> 余誤差関数は次式で定義される関数である。

$$\text{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$$

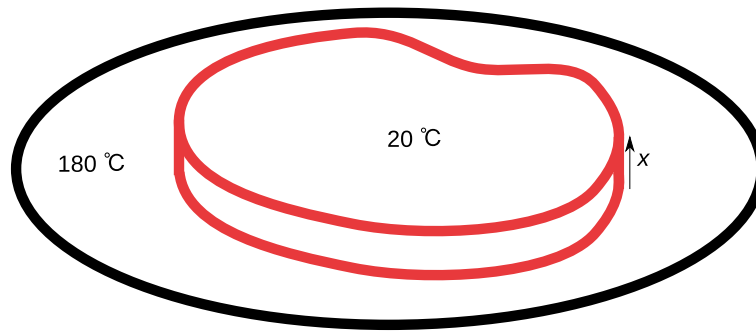


図 2 肉の加熱

と、4 mm 程度までは 60°C より温度が高く火が通っていることが分かる。比較のため、同様に熱拡散率が通常の三倍の赤い肉<sup>脚注 6</sup>（熱拡散率  $a = 3.9 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ）での温度分布を図 4 に示す。熱拡散率が三倍の赤い肉では、ある位置のある温度に達するまでの時間は三分の一となる。例えば、1 cm の厚さが火が通る（60°C を越える）までの時間は通常の肉では 4 分 51 秒（291 s）（図 3 中青印）だが、三倍肉ではその三分の一の 1 分 17 秒（77 s）（図 4 中青印）となる。

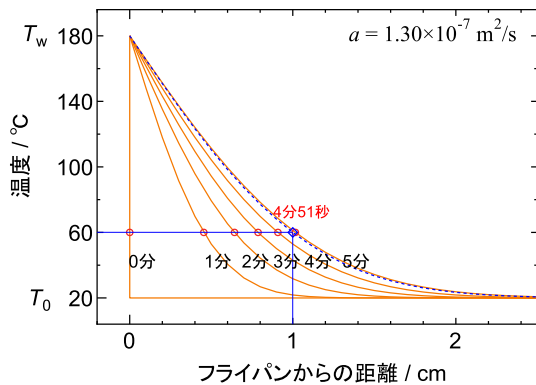


図 3 温度分布（熱拡散率  $a = 1.3 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ）

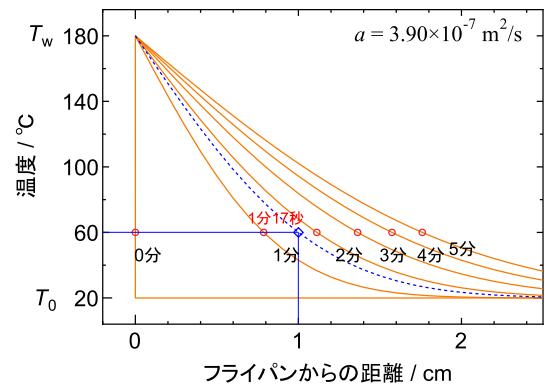


図 4 温度分布（熱拡散率  $a = 3.9 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ）

ある位置である温度となるまでの時間と熱拡散率との関係は無次元数であるフーリエ数  $Fo$  を使うと分かりやすい。式 (2) の  $T$  は  $\sqrt{at}/x$  の関数となっており、これを 2 乗した  $at/x^2$  は無次元数でフーリエ数  $Fo = at/x^2$  と呼ばれる。上式 (2) をフーリエ数  $Fo$  を使って表すと次式となる。

$$T = T_0 + (T_w - T_0) \operatorname{erfc} \left( 2\sqrt{Fo} \right) \quad (3)$$

上式中で右辺の変数は  $Fo$  のみであり、固体内の温度  $T$  はフーリエ数  $Fo$  のみの関数となっている。つまり、ある値の温度に対してはある一つの値のフーリエ数が対応する。このフーリエ数を使って、図 3、図 4 で赤丸で示した肉の塊を焼く際にどこまで火が通るかを計算してみよう。肉は 60°C で焼ける（変性する）ので、 $T_w = 180^\circ\text{C}$ 、

脚注 6 専用の肉

$T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$  で  $T = 60\text{ }^\circ\text{C}$  になるフーリエ数  $Fo_{60\text{ }^\circ\text{C}}$  は式 (3) より次のように求められる<sup>脚注 7</sup>。

$$\begin{aligned} T &= T_0 + (T_w - T_0)\text{erfc}\left(2\sqrt{Fo_{60\text{ }^\circ\text{C}}}\right) \\ 60\text{ }^\circ\text{C} &= 20\text{ }^\circ\text{C} + (180\text{ }^\circ\text{C} - 20\text{ }^\circ\text{C})\text{erfc}\left(2\sqrt{Fo_{60\text{ }^\circ\text{C}}}\right) \\ 0.25 &= \text{erfc}\left(2\sqrt{Fo_{60\text{ }^\circ\text{C}}}\right) \\ Fo_{60\text{ }^\circ\text{C}} &\simeq 0.4067 \end{aligned}$$

上式の  $Fo$  が約 0.4067 となる肉の温度  $60\text{ }^\circ\text{C}$  の条件を、 $Fo = at/x^2$  (時間  $t$ 、位置  $x$ ) で書き直すと次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{at_{60\text{ }^\circ\text{C}}}{x_{60\text{ }^\circ\text{C}}^2} &= 0.4067 \\ x_{60\text{ }^\circ\text{C}}^2 &= \frac{at_{60\text{ }^\circ\text{C}}}{0.4067} \end{aligned} \quad (4)$$

上式から肉の中を  $60\text{ }^\circ\text{C}$  の等温面がどのように移動するかが分かる。図 3 の赤丸と比べてみよう。普通の肉 (熱拡散率  $a = 1.3 \times 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$ ) で 1 分後 ( $t_{60\text{ }^\circ\text{C}} = 60\text{ s}$ ) を式 (4) に代入すると、位置  $x_{60\text{ }^\circ\text{C}}$  が  $4.38 \times 10^{-3}\text{ m}$  と図中の赤丸と同じ値が求められる。他の時間でも、どの位置まで  $60\text{ }^\circ\text{C}$  となっているかが同様に求められる。三倍の赤い肉でも熱拡散率  $a = 3.9 \times 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$  を代入するところで、同様に任意の時間での  $60\text{ }^\circ\text{C}$  となっている位置が求められる。つまり、式 (4) で表されるように熱拡散率は等温面がある時間 ( $t_{60\text{ }^\circ\text{C}}$ ) 経過した際にどれくらい進んでいるか ( $x_{60\text{ }^\circ\text{C}}$ ) を表しており、温度面の移動する速度を表しているとも考えられる。熱拡散率に応じて等温面 (温度) の伝わる (伝導) 速さが変化する<sup>脚注 8</sup>。このことから温度伝導率とも呼ばれる。ただし、熱拡散率は式 (4) で表されるように、距離÷時間ではなく距離の二乗÷時間である。等温面の移動距離の二乗と経過時間の関係が比例関係 (式 (4)) となり、その比例定数が熱拡散率である。そのため、熱拡散率の単位は距離の二乗を時間で割った次元 [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] で表される。

## A 付録-熱伝導方程式の解

### A.1 条件

一定温度の加熱面と大きな固体 (半無限固体) という条件で一次元の発熱なしの非定常熱伝導方程式を以下の初期条件と境界条件で解くと、固体内の温度  $T$  の余誤差関数  $\text{erfc}$  の関係式を求められる。

支配方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5)$$

初期条件  $t = 0$  で全ての  $x$  で  $T = T_0$

$$T(x, 0) = T_0$$

<sup>脚注 7</sup> 余誤差関数  $\text{erfc}$  は表計算ソフトなどで簡単に値を求めることができる。

<sup>脚注 8</sup>  $60\text{ }^\circ\text{C}$  以外の等温面の位置を求めたい場合には定数 0.4067 ではなく、式 (3) から求めたい温度のフーリエ数を計算する。

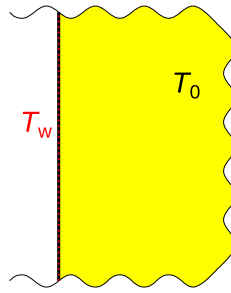


図 5 一面からの加熱

境界条件  $x = 0$  で  $T = T_w$

$$T(0, t) = T_w$$

境界条件  $x = \infty$  で  $T = T_0$

$$T(\infty, t) = T_0$$

## A.2 無次元化

支配方程式が解けるように支配方程式と初期条件、境界条件の温度  $T$  を次式で表される無次元温度  $\theta$  に変換する。

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \quad (6)$$

上式 (6) から温度  $T$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \\ \theta(T_w - T_0) &= T - T_0 \\ T &= (T_w - T_0)\theta + T_0 \end{aligned}$$

支配方程式 式 (5) へ代入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} (T_w - T_0)\theta + T_0 &= a \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T_w - T_0)\theta + T_0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$T_0$  と  $T_w$  は定数であるため、元の  $T$  の式と同じ形となる。

初期条件  $t = 0$  で全ての  $x$  で  $\theta = 0$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad (8)$$

境界条件  $x = 0$  で  $\theta = 1$

$$\theta(0, t) = 1 \quad (9)$$

境界条件  $x = \infty$  で  $\theta = 0$

$$\theta(\infty, t) = 0 \quad (10)$$

### A.3 ラプラス変換

無次元温度で変形した微分方程式を解くためにラプラス変換<sup>脚注 9</sup> をする<sup>脚注 10</sup>。

支配方程式 式 (7) の両辺をラプラス変換する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\} \\ \int_0^\infty e^{-st}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\}dt &= \int_0^\infty e^{-st}\left\{a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\}dt \\ [e^{-st}\theta]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial e^{-st}}{\partial t}\theta dt &= a\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt \end{aligned}$$

$\theta$  は  $x$  と  $t$  の二変数で偏微分であるが、 $t$  で積分をすることで  $t$  の関数ではなくなり  $d^2/dx^2$  で表される。

$$\begin{aligned} e^{-s\infty}\theta(x,\infty) - e^{-s\cdot 0}\theta(x,0) - \int_0^\infty (-se^{-st}\theta)dt &= a\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt \\ \underbrace{\frac{\theta(x,\infty)}{e^{s\infty}}}_{\infty \text{ で割るので } 0} - \underbrace{\theta(x,0)}_{\text{初期条件の式 (8) より } 0} + s\int_0^\infty e^{-st}\theta dt &= a\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt \end{aligned}$$

$\infty$  で割るので 0 初期条件の式 (8) より 0

$$\begin{aligned} s\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt &= a\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt \\ \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt}_{\Theta \text{ と置く}} &= \frac{a}{s}\frac{d^2}{dx^2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt}_{\Theta \text{ と置く}} \end{aligned}$$

$$\Theta = \frac{a}{s}\frac{d^2\Theta}{dx^2} \quad (11)$$

上式 (11) の  $\Theta$  は次式の一般解がある。

$$\Theta = C_1 e^{x\sqrt{s/a}} + C_2 e^{-x\sqrt{s/a}} \quad (12)$$

境界条件 式 (9) の  $x = 0$  での境界条件をラプラス変換する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta(0, t)) &= \mathcal{L}(1) \\ \int_0^\infty e^{-st}\theta(0, t)dt &= \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}dt}_{\text{ラプラス変換表より計算}} \end{aligned}$$

$$\Theta_{x=0} = \frac{1}{s} \quad (13)$$

脚注 9 ラプラス変換の計算は参考書等に載っているラプラス変換表を参照する。例えば [1]。

脚注 10  $\mathcal{L}\{z(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st}z(x, t)dt$

境界条件 式 (10) の  $x = \infty$  での境界条件をラプラス変換する。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta(\infty, t)) &= \mathcal{L}(0) \\ \int_0^\infty e^{-st} \theta(\infty, t) dt &= \int_0^\infty 0 dt \\ \Theta_{x=\infty} &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

境界条件の適用 式 (12) の不定定数を消すためにラプラス変換した境界条件の式 (14) を式 (12) へ適用する。

$$\begin{aligned}\Theta_{x=\infty} &= 0 \\ C_1 e^{\infty \sqrt{s/a}} + \underbrace{C_2 e^{-\infty \sqrt{s/a}}}_{\infty \text{ で割るので } 0} &= 0 \\ C_1 \underbrace{e^{\infty \sqrt{s/a}}}_{\infty \text{ となるため式が成り立つためには } C_1 = 0 \text{ でなくてはならない}} &= 0 \\ C_1 &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

よって式 (15) を式 (12) へ代入し次式となる。

$$\Theta = C_2 e^{-x \sqrt{s/a}}\tag{16}$$

境界条件の式 (13) を式 (16) へ適用する。

$$\begin{aligned}\Theta_{x=0} &= \frac{1}{s} \\ C_2 e^{-0 \sqrt{s/a}} &= \frac{1}{s} \\ C_2 &= \frac{1}{s}\end{aligned}\tag{17}$$

式 (16) へ式 (17) を代入し次式となる。

$$\Theta = \frac{1}{s} e^{-x \sqrt{s/a}}\tag{18}$$

## A.4 解

上式 (18) の両辺を逆ラプラス変換をすると、ラプラス変換表より次の関係が得られる 脚注 11。

$$\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-y^2} dy$$

脚注 11 余誤差関数は次式で定義される関数である。

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$$

上式中の erf は誤差関数で次式のように定義されている。

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\
&= \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

無次元温度  $\theta$  を有次元の温度  $T$  へ戻す (式 (6))。

$$\begin{aligned}
\theta &= \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\
\frac{T - T_0}{T_w - T_0} &= \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\
T &= T_0 + (T_w - T_0)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

温度  $T$  の式が得られた。

## 参考文献

- [1] 原島 博, 堀 洋一, 工学基礎 ラプラス変換と  $z$  変換, 数理工学社, 2004.

---

この図を含む文章の著作権は椿耕太郎にあり、クリエイティブ・コモンズ 表示 - 非営利 - 改変禁止 4.0 国際 ライセンスの下に公開する (ライセンスの詳細 <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.ja>)。最新版は <http://camellia.net> で公開している。