私でも分かる! **数値計算**

椿 耕太郎

平成 25 年 8 月 2 日

はじめに

数値計算の専門書は多いが、初学者に分かりやすいように基本の式からまとめているものが見つからなかったため、基本の式からまとめていくつもりである。まだ作成途中であり間違いがある可能性もあるため、詳細を知りたい場合は数値計算の専門書や末尾の参考文献を参考にしてほしい。なるべく分かりやすい内容となるように、数値計算の勉強会での内容を参考に作成している。勉強会の参加者の学生の諸君と、内容について助言を下さった皆様に感謝します。数値計算勉強会の参加者:2010 年度 長友理恵さん、2011 年度 江島大和くん、行徳俊希くん、2013 年度 江島大和くん。助言を頂いた方：松尾叔美さん。

目 次

第1章　概要

ある状況での摩擦力や伝熱量などを知りたい場合には、速度分布や温度分布などを求める必要がある。現象を記述する式 (支配方程式) と境界条件・初期条件が分かっていれば、支配方程式を解くことで速度分布や温度分布などを求めることができる。解く方法として解析的に厳密解を求める方法や数値解析による方法がある。支配方程式が微分方程式である場合、解く際の積分定数を求めるためにそれぞれの変数の微分の階数を足し合わせた数だけ条件が必要である。時間微分の場合は初期条件、位置での微分であれば境界条件と呼ばれる。

一つの例として、１次元の熱伝導の定常の現象の厳密解を求めてみよう。この時、支配方程式は以下の１次元の熱伝導方程式となる。

$$0 = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

$x = 0$、$x = 7$ を境界とし、境界条件を以下の２条件とする。

$$x = 0 \text{ で } T = 10\ ℃ \tag{1.2}$$

$$x = 7 \text{ で } T = 30\ ℃ \tag{1.3}$$

式 (1.1) を x で積分して、

$$0 = \int_x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

$$0 = \alpha \frac{\partial T}{\partial x} + C_1$$

さらに x で積分すると、

$$0 = \int_x \alpha \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_x C_1 dx$$

$$0 = \alpha T + C_1 x + C_2$$

境界条件より、$C_2 = -10\alpha$ と $C_1 = -\dfrac{20}{7}\alpha$ となる。よって、温度は次の関数となる。

$$T = \frac{20}{7}x + 10$$

この温度分布から、熱流束 q はフーリエの法則より上式を x で微分し次のように求められる。

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{20}{7}k$$

このように厳密解を求めることができる場合もあるが、多くの場合、支配方程式と条件から厳密解を求めることは難しい。そこで数値計算では、計算対象を細かな領域に分割して支配方程式をコンピュータの計算できる加減乗除の式（離散化方程式）にする離散化をおこない、温度分布や速度分布の連続的な値を求めれるのではなく、分割した不連続な点 (離散点) における値を求める。

離散化では、対象を分けた不連続な点ごとの求めたい値（速度・温度など）の数と同じ数の方程式（離散化方程式）を立て、連立させ解くことにより、それぞれの点での値を求める。離散化した領域（非定常では時間も）に支配方程式と境界条件・初期条件を対応させ、簡単な代数方程式で離散化方程式として表す。

数値計算の流れは以下の通りである。

1. 求めたい現象の支配方程式と境界条件、初期条件を求める
2. 離散化する（離散化した領域と時間に対応した支配方程式・境界条件・初期条件を求める）
3. 離散化方程式（連立方程式）を解く

これ以降では求める値として圧力・速度・温度・濃度を、支配方程式（保存式）は以下の式を考えていく。

質量保存式

運動量保存式　速度の計算

エネルギー保存式　温度の計算

化学種保存式　濃度（質量分率・モル分率）の計算

第2章　私でも分かる！支配方程式

2.1　保存量

2.1.1　保存の関係

支配方程式では、知りたい物理量に関する保存式を立てる。支配方程式はそれぞれ、保存を考えるコントロールボリューム（境界領域）について考える。例として図 2.1 のような排出口のある水槽をコントロールボリューム（境界領域）として水の体積 $V[\mathrm{m}^3]$ の保存を考えてみる。ある時間 $t[\mathrm{s}]$ での水の体積を $V(t)[\mathrm{m}^3]$、$\Delta t[\mathrm{s}]$ 後の水の体積を $V(t+\Delta t)[\mathrm{m}^3]$ と表す。$\Delta t[\mathrm{s}]$ 間で変化する水槽の水の体積は、入ってくる水の流量 $F_{in}[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$ と出ていく水の流量 $F_{out}[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$ に経過時間 $\Delta t[\mathrm{s}]$ を掛けて次の関係で表される。

$$V(t+\Delta t) - V(t) = F_{in}\Delta t - F_{out}\Delta t$$

両辺を Δt で割ると次式となる。

$$\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = F_{in} - F_{out}$$

左辺は"水槽に入ってる量 $V[\mathrm{m}^3]$ の $\Delta t[\mathrm{s}]$ での変化量"となる。ここで時間の変化 $\Delta t[\mathrm{s}]$ が限りなく小さい場合には次式となる。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}\right\} &= F_{in} - F_{out} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= F_{in} - F_{out} \qquad (2.1) \end{aligned}$$

上式の左辺は水槽の水量の時間変化、右辺は出入りする水の流量である。

水槽が密閉されており中の水の様子が観察できない場合でも、上式に水の流入量と流出量を代入することにより、水の体積の変化を知ることができる。

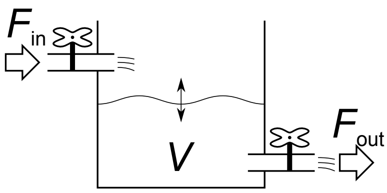

図 2.1　Control Volume Water

2.1.2 支配方程式

前の 2.1.1 節の水槽と同様に、時間 t[s] から Δt[s] 経過した際の保存の関係を知りたい物理量に対して考える。また、水槽の代わりに保存を考える対象をコントロールボリューム（境界領域）とする。コントロールボリューム内の体積に対して物理量が変化（生成や消滅）することがあるのでその項を加える。

$$
\begin{aligned}
&\text{内部の物理量}\ (t+\Delta t) - \text{内部の物理量}\ (t) = \\
&\qquad \Delta t\ \text{の間に境界面で出入する物理量} + \Delta t\ \text{の間に変化する内部の体積に対する物理量}
\end{aligned}
$$

時間あたりの出入量、変化量と経過時間 Δt[s] で表すと次式となる。

$$
\begin{aligned}
&\text{内部の物理量}\ (t+\Delta t) - \text{内部の物理量}\ (t) = \\
&\qquad \text{（時間あたりの）境界面での出入量} \times \Delta t + \text{（時間あたりの内部の）体積に対する変化量} \times \Delta t
\end{aligned}
$$

両辺を経過時間 Δt で割る。

$$
\frac{\text{内部の物理量}\ (t+\Delta t) - \text{内部の物理量}\ (t)}{\Delta t} = \text{境界面での出入量} + \text{体積に対する変化量}
$$

時間の変化 Δt[s] が限りなく小さい場合には次式となる。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\text{内部の物理量}\ (t+\Delta t) - \text{内部の物理量}\ (t)}{\Delta t} \right\} &= \text{境界面での出入量} + \text{体積に対する変化量} \\
\frac{\partial \text{内部の物理量}\ (t)}{\partial t} &= \text{境界面での出入量} + \text{体積に対する変化量} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

境界面での出入量は、次式のように境界面に流入する流体によって運ばれる出入量と境界面での作用による出入量に分けられる。境界面での作用には分子運動による拡散などがある。

$$
\begin{aligned}
&\text{（時間あたりの）境界面での出入量} = \\
&\qquad \text{（時間あたりの）境界面での対流による（出入する流体によって運ばれる）出入量} \\
&\qquad\qquad + \text{（時間あたりの）境界面での作用による出入量} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

式 (2.2)$^{\text{p.8}}$ と式 (2.3)$^{\text{p.8}}$ より一般的に支配方程式は次の形で書き表される。

$$
\frac{\partial \text{内部の物理量}\ (t)}{\partial t} = \text{境界面での対流による出入量} + \text{境界面での作用による出入量} + \text{体積に対する変化量} \qquad (2.4)
$$

式 (2.4)$^{\text{p.8}}$ の左辺のコントロールボリューム内に持っている物理量の時間変化の項を非定常項と呼び、正の値であれば時間経過と共にコントロールボリューム内の物理量が増加し、例えば運動量であれば速度が速くなる。保存量がエネルギーであればコントロールボリュームでの温度が上昇する。右辺の出入量の合計がゼロであれば時間経過に対して変化がなくなり、定常状態と呼ぶ。

2.2 節以降では次の保存対象について、それぞれ支配方程式（保存式）をたてる。

- 質量 [kg]
- 運動量 [kg m/s] [N s]
- エネルギー [J]
- 化学種（混合物のそれぞれの濃度）[kg/m³] [kmol/m³]

支配方程式をたてる際は、流体は等方的でかつ密度以外の物性値など（粘性係数 μ [Pa·s]、定積比熱 c_v [J/(K·kg)]、熱伝導率 k [W/(K·m)]、物質拡散係数 D_i [m²/s]、重力加速度 $\boldsymbol{g}$ [m/s²]）は一定であると仮定する。

2.1.3 コントロールボリューム

これ以降はコントロールボリュームとして微小な直方体（図 2.2）を考える。コントロールボリュームの各境界面での値を表す変数（速度や温度）には下付文字をつけて表す。x 方向に垂直な左側の面は下付 $_{x-}$ で、右側の面は下付 $_{x+}$ で、y 方向に垂直な下側の面は下付 $_{y-}$ で、上側の面は下付 $_{y+}$ で、z 方向に垂直な奥側の面は下付 $_{z-}$ で、手前側の面は下付 $_{z+}$ で表される。下付きのない変数はコントロールボリュームでの代表値の値とする。

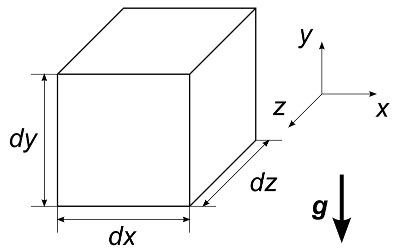

図 2.2 Control Volume

コントロールボリュームのそれぞれの面について、コントロールボリュームの各面に面積ベクトルをとると以下のように書ける。面積ベクトルとは、対象とする面の単位法線ベクトルに面積をかけたベクトルである。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\boldsymbol{A}_{x-} = (dydz, 0, 0) \tag{2.5}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\boldsymbol{A}_{x+} = (dydz, 0, 0) \tag{2.6}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\boldsymbol{A}_{y-} = (0, dzdx, 0) \tag{2.7}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\boldsymbol{A}_{y+} = (0, dzdx, 0) \tag{2.8}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$\boldsymbol{A}_{z-} = (0, 0, dxdy) \tag{2.9}$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\boldsymbol{A}_{z+} = (0, 0, dxdy) \tag{2.10}$$

2.1.4 出入の項 対流

対流による出入は“ 質量流量×質量あたりの物理量 ”で表される。この“ 対流による出入 ”について考える。対流は移流とも呼ばれ、流体中で流れによって対象とする物理量が運ばれる現象である。例として、図 2.3 のように水槽の中で、インクの濃度を物理量として考えてみる。水槽の下半分にインクをゆっくり入れ、その後上半分に水をゆっくり注ぐとインクと水はほとんど混ざらず、上部に水、下部にインクの層ができる。この時、水槽の底から上向きの流れを作ったとき（水槽の底にストローが刺さっており、勢いよくインクを入れたとき）インク（濃度の高い流体）が上に向かって流れることにより、インクが水槽下部から上部へ運ばれる。この上向きの流れが発生した位置にコントロールボリュームをとると、下向きの面では対流によりインク（濃度の高い流体）が入り、上向きの面では対流により水（濃度の低い流体）が出て行くことになり、”対流による出入 ”がおこる。

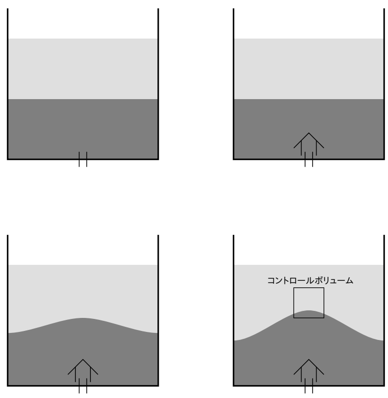

図 2.3 対流による出入

対流により出入りする量は、対象とする物理量を運ぶ流れの強さによる。例えば図 2.2 の左側の面から一秒あたりに対象とする物理量が流入する量 $F_{adv,x-}$ を考える。この $F_{adv,x-}$ を左側の面に流入する質量流量 $\dot{m}_{x-}$ によって表すと、次のようになる。

$$F_{adv,x-} = \phi \dot{m}_{x-}$$

ここで ϕ は単位質量あたりの対象とする物理量を表す。インクの例であれば、1kg 中に含まれるインクの質量（濃度）が ϕ に入る。質量流量 $\dot{m}_{x-}$[kg/s] は流体の密度 ρ_{x-} [kg/m^3] と体積流量 V_{x-} [m^3/s] で

$$\dot{m}_{x-} = \rho_{x-} V_{x-}$$

と表される。また、体積流量 V_{x-} [m^3/s] は、通過する図 2.2 の左側の面 $\boldsymbol{A}_{x-}$ [m^2] の面積が微小 $(dydz)$ であるので、速度の分布は一様であるとし、x 方向の速度 $\boldsymbol{v}_{x-}$ [m/s][1] と面積 $\boldsymbol{A}_{x-}$ [m^2]（速度ベクトルと面積ベクトルの内積）で表される。

$$V_{x-} = \boldsymbol{v}_{x-} \cdot \boldsymbol{A}_{x-} = u_{x-} dydz$$

上記三式から、対象とする物理量が流入する量 $F_{adv,x-}$ は

$$F_{adv,x-} = \phi \rho u_{x-} dydz$$

と表される。

2.1.5 出入の項 面での作用

境界面で作用する出入の現象に拡散がある。対象とする物理量の値に分布がある場合に、流体の流れではなく分子運動によって物理量が運ばれるのが拡散である。拡散は流れによる輸送ではないので流れがない状況（流体の速度はゼロ）でも拡散により運ばれる。物質拡散では、分子が入れ替わることにより物質が運ばれる。水槽の上部と下部で水とインクの層を乱さないように静かに作ったとき、流れを起こさなくても次第に水とインクの境界が曖昧になり、長い時間の後には水とインクが混ざり水槽の中身はすべて薄いインクとなる。流れがないときにゆっくりと混ざる現象を拡散と呼ぶ。水の入った水槽に、ゆっくりとインクを一滴落とした後にインクが薄くなり広がっていくのも拡散である。

拡散の影響は式 (2.4)p.8 の“ 境界面での作用による出入量 ”に含まれ、運動量の拡散（粘性[2]）、エネルギーの拡散（熱伝導）、物質拡散がある。それぞれの物理量に勾配があるとき、拡散による輸送量 F_{dif} は拡散係数 D [m^2/s]（運動量では動粘性係数、エネルギーでは熱拡散係数、物質では物質拡散係数）により、次式により表される[3]。

$$F_{dif} = -D\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi$$

[1] 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] は x 方向成分速度 u [m/s]、y 方向成分速度 v [m/s]、z 方向成分速度 w [m/s] で次のように表される。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

[2] 容器の中に粘性係数が高い流体（例えば水飴）と粘性係数が低い流体（例えば空気）で満たしその中で手を動かした時、手が流体に与えた運動量が拡散すると遠くの流体も手と一緒に動き、手は大きな力を感じる。運動量が拡散しづらい流体では近くの流体しか手と一緒に動かないので、手はあまり大きな力を感じない。

[3] $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

ここで ϕ は単位質量あたりの対象とする物理量を表す。図 2.2 の左側の面を考えると、

$$F_{dif,x-} = -D\boldsymbol{A}_{x-} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi_{x-} = -D\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x-} dydz$$

この拡散の項は運動量、エネルギー、化学種の保存式でそれぞれ以下のようになる。

運動量 (ニュートンの粘性法則)

粘性による x 方向速度成分 u [m/s] の y 方向の速度勾配による剪断応力 τ [N/m²] は粘性係数 μ [Pa·s] により次式で表される。

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

運動量の時間変化である力が応力と面積の積から次式で求められる。

$$\tau A = \mu\frac{\partial u}{\partial y}dydz$$

エネルギー (フーリエの法則)

x 方向の温度勾配による熱流束 q [W/m²] は熱伝導率 k [W/(K·m)] により次式で表される。

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

伝熱量 Q [W] は伝熱の面積 A [m²] とともに次式で表される。

$$Q = -k\frac{\partial T}{\partial x}dydz$$

化学種 (フィックの拡散法則)

質量流束 j [kg/(m²·s)] は濃度（質量分率）ω [-]([kg/kg]) の x 方向の勾配により拡散係数 D [m²/s] を用いて次式で表される。

$$j = -\rho D\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

質量流量は上式と面積の積で次式で求められる。

$$Aj = -\rho D\frac{\partial \omega}{\partial x}dydz$$

2.1.6　相対する面での差の計算

式 (2.4)p.8 で表さられる支配方程式の出入量について考える。コントロールボリューム内の物理量が増えると正となるので出入は“ 入る量 - 出る量 ”で計算される。図 2.2 の左側の yz 面で、物理量の出入 F_{x-} があるとする。このときの、右の yz 面での出入を考える。yz 面を通過する出入の量が x の位置によって異なれば、F は x の関数として表される。コントロールボリューム左側から右側に x 方向の位置が dx だけ変わるとき、それぞれでの出入の量、F_{x-} と F_{x+} の値はどう違うだろうか。図 2.4 に示すように、左側の面での流量 F の x 方

向への変化量（傾き）は、x で微分した値、$\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-}$ となる。図 2.4 のグラフのように傾きは $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-}$ であるので、dx 離れた右側の位置での縦軸の F の微小変化量 dF は、傾きに dx をかけた $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx$ となる。よって、右側の面での出入の量、F_{x+} は次のように表される[4]。

$$F_{x+} = F_{x-} + dF = F_{x-} + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx \tag{2.11}$$

x 方向の yz 面における出入の量は、これらの左側の面での F_{x-} と右側の面での F_{x+} から求められる。出入量は左側と右側の面ではコントロールボリュームに対して出る方向と入る方向が逆になるので、差をとり x 方向の値を求める。例えば左から右（x の正の方向）に物理量が移っている場合は、左の面では入る方向で増加するプラス、右の面では出て行き減少しマイナスとなる。式で表すと、

$$\begin{aligned}\text{“ 出入量 ”} = F_{x-} - F_{x+} &= F_{x-} - \left(F_{x-} + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx\right) \\ &= -\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。式 (2.4)p.8 の“ 境界面での対流による出入量 ”、“ 境界面での作用による出入量 ”、“ 体積に対する変化量 ”の項は上式 (2.12)p.13 で表される。入ってくる物理量をベクトルで表すと、変化量は発散[5]で表される。

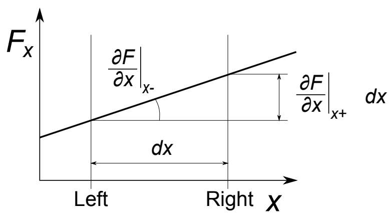

図 2.4 変化量

2.1.7 微小項の取り扱い

微小体積のコントロールボリュームを考えている（2.1.3 節）ため、体積は $dxdydz$ で表される。コントロールボリュームの体積あたりの微小量 (dx, dy, dz) は計算対象となる項に比べ高位の無限小となるため、式中の次の項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は無視する。

また、項が $dxdydz$ で括られている、または式全体を $dxdydz$ で割った場合には、各境界面の間での変数の値の差は計算対象となる項と比べ高位の無限小であるため、各境界面の違いは無視し、下付をつけない。例え

[4]数学的にはテーラー展開から求める（式 (A.7)p.75）。

[5]ベクトル $\boldsymbol{F}$ に対する発散は $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix}$ である。

ば、式 (2.11)p.13 で表される x 軸に垂直な面の左側と右側での差を考える。式 (2.11) より x 軸に垂直な面の左側と右側での変数 F の関係は以下のようになる。

$$F_{x+} = F_{x-} + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx$$

これがコントロールボリュームの体積あたりの値（$dxdydz$ で割った式）であるとすれば、右辺第二項は計算対象の項と比べ高位の無限小であるので、無視し、次式のように x 軸左側と右側の値が等しくなり、下付をつけないコントロールボリュームの代表値として表される。

$$F_{x+} = F_{x-} = F$$

2.2 質量保存

質量の保存において、コントロールボリュームへの出入は対流のみであり、式 (2.4)p.8 の“ 体積に対する変化量 ”では質量が生成される核反応等が考えられるがここでは考慮しない。また、境界面での質量の出入は対流のみであるため、“ 境界面での作用による出入量 ”と“ 体積に対する変化量 ”の項は考慮せず、次式の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial \text{内部の質量}\,(t)}{\partial t} = \text{対流による出入} \tag{2.13}$$

2.2.1 持っている質量の時間変化

コントロールボリュームの体積は $dxdydz$ [m³]、質量 m [kg]= $\rho dxdydz$ で表される。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz \tag{2.14}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

密度 ρ [kg/m³] が一定であれば、時間での微分値は 0 となる（変化しない）ので、非圧縮性流体では非定常項は 0 となる。

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = 0 \tag{2.15}$$

2.2.2　対流による質量の出入

質量当たりの質量は 1 [-] であるので、対流による出入は質量流量×質量当たりの質量で次式で表される (2.1.4[10] 節)。

$$\dot{m} \tag{2.16}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.16)[p.15] に示すように質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] であり、速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ [m/s] と面積ベクトル (式 (2.5)-式 (2.10)[p.9]、密度 ρ [kg/m^3] によりそれぞれの面で次のように表される。途中で相対する面の関係を式 (2.11)[p.13] を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\dot{m}_{x-} = \rho_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} \cdot \boldsymbol{A}_{x-} = \rho_{x-}u_{x-}dydz \tag{2.17}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned}\dot{m}_{x+} &= \rho_{x+}\boldsymbol{v}_{x+} \cdot \boldsymbol{A}_{x+} = \rho_{x+}u_{x+}dydz = \left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\ &= \left(\rho_{x-}u_{x-} + \rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx + u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-} dx + \underbrace{\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\right)dydz\end{aligned} \tag{2.18}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-} = \rho_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} \cdot \boldsymbol{A}_{y-} = \rho_{y-}v_{y-}dzdx \tag{2.19}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned}\dot{m}_{y+} &= \rho_{y+}\boldsymbol{v}_{y+} \cdot \boldsymbol{A}_{y+} = \rho_{y+}v_{y+}dzdx = \left(\rho_{y-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)\left(v_{y-} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\ &= \left(\rho_{y-}v_{y-} + \rho_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy + v_{y-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-} dy + \underbrace{\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\right)dzdx\end{aligned} \tag{2.20}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\dot{m}_{z-} = \rho_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} \cdot \boldsymbol{A}_{z-} = \rho_{z-}w_{z-}dxdy \tag{2.21}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}\dot{m}_{z+} &= \rho_{z+}\boldsymbol{v}_{z+} \cdot \boldsymbol{A}_{z+} = \rho_{z+}w_{z+}dxdy = \left(\rho_{z-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)\left(w_{z-} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\ &= \left(\rho_{z-}w_{z-} + \rho_{z-}\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz + w_{z-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{z-} dz + \underbrace{\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{z-}\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\right)dxdy\end{aligned} \tag{2.22}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[6]（2.1.6 節 p.12）。

x 軸に沿った出入 式 (2.17)$-$ 式 (2.18)

$$-\left(\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}+u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\right)dxdydz \tag{2.23}$$

y 軸に沿った出入 式 (2.19)$-$ 式 (2.20)

$$-\left(\rho_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}+v_{y-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-}\right)dxdydz \tag{2.24}$$

z 軸に沿った出入 式 (2.21)$-$ 式 (2.22)

$$-\left(\rho_{z-}\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-}+w_{z-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z-}\right)dxdydz \tag{2.25}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.23)+ 式 (2.24)+ 式 (2.25) をとると、コントロールボリューム全体での対流による質量の出入が次式で求められる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。

$$\begin{aligned}-\left\{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right\}dxdydz &= -(\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho)dxdydz\\ &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})dxdyxz\end{aligned} \tag{2.26}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.16)p.15 に示すように質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] であり、速度ベクトル $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$ [m/s] と面積ベクトル (式 (2.5)-式 (2.10)p.9、密度 ρ [kg/m^3] によりそれぞれの面で次のように表される。途中で相対する面の関係を式 (2.11)p.13 を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\dot{m}_{x-}=\rho\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{A}_{x-}=\rho u_{x-}dydz \tag{2.27}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\dot{m}_{x+}=\rho\boldsymbol{v}_{x+}\cdot\boldsymbol{A}_{x+}=\rho u_{x+}dydz=\rho\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \tag{2.28}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-}=\rho\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{A}_{y-}=\rho v_{y-}dzdx \tag{2.29}$$

[6] 例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 $-$ を加え逆にする。

y 軸に垂直 zx 面上

$$\dot{m}_{y+} = \rho \boldsymbol{v}_{y+} \cdot \boldsymbol{A}_{y+} = \rho v_{y+} dzdx = \rho \left(v_{y-} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y-} dy \right) dzdx \tag{2.30}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\dot{m}_{z-} = \rho \boldsymbol{v}_{z-} \cdot \boldsymbol{A}_{z-} = \rho w_{z-} dxdy \tag{2.31}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\dot{m}_{z+} = \rho \boldsymbol{v}_{z+} \cdot \boldsymbol{A}_{z+} = \rho w_{z+} dxdy = \rho \left(w_{z-} + \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z-} dz \right) dxdy \tag{2.32}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[7]（2.1.6 節 p.12）。

x 軸に沿った出入 式 (2.27)− 式 (2.28)

$$-\rho \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x-} dxdydz \tag{2.33}$$

y 軸に沿った出入 式 (2.29)− 式 (2.30)

$$-\rho \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y-} dxdydz \tag{2.34}$$

z 軸に沿った出入 式 (2.31)− 式 (2.32)

$$-\rho \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z-} dxdydz \tag{2.35}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.33)+ 式 (2.34)+ 式 (2.35) をとると、コントロールボリューム全体での対流による質量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.13)。

$$-\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dxdydz = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} dxdydz \tag{2.36}$$

2.2.3 質量保存式（連続の式）

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

コントロールボリュームが持っている質量の時間変化を表す式 (2.14)p.14、対流による質量の出入を表す式 (2.26)p.16 を式 (2.13)p.14 へ代入し次式で質量保存式（連続の式とも呼ばれる）は表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dxdydz$$

[7]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 − を加え逆にする。

両辺を微小体積 $dxdydz$ で割ると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \tag{2.37}$$

が得られる。

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

コントロールボリュームが持っている質量の時間変化を表す式 (2.15)[p.14]、対流による質量の出入を表す式 (2.36)[p.17] を式 (2.13)[p.14] へ代入し次式で質量保存式（連続の式とも呼ばれる）は表される。

$$0 = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} dxdydz$$

両辺を密度 ρ [kg/m^3] と微小体積 $dxdydz$ [m^3] で割ると、

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.38}$$

が得られる。

2.3 運動量保存

ニュートンの第二法則より運動量 $m\boldsymbol{v}$ [kg·m/s] の時間変化は力 $\boldsymbol{F}$ [N] として次式のように定義されている[8]。

$$\frac{\partial m\boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F}$$

流れ系を考えているので、対流による運動量の出入を考え、力はコントロールボリュームの面にかかる力と体積にかかる力をそれぞれ考え、

$$\frac{\partial \text{持っている運動量}}{\partial t} = \text{対流による出入} + \text{表面に作用する力（表面力）} + \text{体積に作用する力（体積力）}^{9} \tag{2.39}$$

上式のように表される。ここで式 (2.4)[p.8] の“ 境界面での作用による出入量 ”に表面力、“ 体積に対する変化量 ”に体積力が相当する。

2.3.1 持っている運動量の時間変化

コントロールボリュームの体積は $dxdydz$ [m^3]、質量 m [kg]= $\rho dxdydz$ で表されるので、速度ベクトルを $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ [m/s] とすれば、運動量の時間変化は次のように表すことが出来る。

[8] 運動量の変化量 $\Delta(m\boldsymbol{v})$ は次式のように、力 $\boldsymbol{F}$ と時間 Δt の積で表される力積となる。

$$\Delta(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}\Delta t$$

[9] 重力や慣性力のように体積全体に作用する力が体積力、摩擦のように表面にのみ作用する力が表面力である

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

$$\frac{\partial m\boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \rho\boldsymbol{v}}{\partial t}dxdydz = \left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dxdydz = \begin{pmatrix} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \\ \rho\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \\ \rho\dfrac{\partial w}{\partial t} + w\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \end{pmatrix} dxdydx \tag{2.40}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

$$\frac{\partial m\boldsymbol{v}}{\partial t} = \rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dxdydz = \rho\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} dxdydx \tag{2.41}$$

2.3.2　対流による運動量の出入

質量当たりの運動量は $\boldsymbol{v}$ [m/s] であるので、対流による出入は質量流量×質量当たりの運動量で次式で表される。

$$\dot{m}\boldsymbol{v}$$

質量当たりの運動量は $\boldsymbol{v}$ [m/s] であるので、対流による出入は質量流量×質量当たりの運動量で次式で表される（2.1.4[10] 節）。

$$\dot{m}\boldsymbol{v} \tag{2.42}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.42)[19] と各面の質量流量の式 (2.17)-(2.22)[p.15] より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)[p.13] を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\dot{m}_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} = \rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}dydz = \rho_{x-}\begin{pmatrix} u_{x-}^2 \\ u_{x-}v_{x-} \\ u_{x-}w_{x-} \end{pmatrix} dydz \tag{2.43}$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}\boldsymbol{v}_{x+} &= \rho_{x+}u_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}dydz \\
&=\left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&=\Bigg(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \underbrace{\rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx + \rho_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx + u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}}_{\text{計算は付録の式 (A.4)p.73 参照}} \\
&\quad \underbrace{+\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^2 + u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^2 + \boldsymbol{v}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}} \\
&\quad \underbrace{+\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^3}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\Bigg)dydz \\
&=\left(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= \begin{pmatrix} \rho_{x-}u_{x-}^2 + \left.\dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ \rho_{x-}u_{x-}v_{x-} + \left.\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ \rho_{x-}u_{x-}w_{x-} + \left.\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial x}\right|_{x-} dx \end{pmatrix} dydz
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$
\dot{m}_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} = \rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}dzdx = \rho_{y-}\begin{pmatrix} u_{y-}v_{y-} \\ v_{y-}^2 \\ v_{y-}w_{y-} \end{pmatrix} dzdx \tag{2.45}
$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{y+}\boldsymbol{v}_{y+} &= \rho_{y+}v_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}dzdx \\
&= \left(\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} + \left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\
&= \begin{pmatrix} \rho_{y-}u_{y-}v_{y-} + \left.\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ \rho_{y-}v_{y-}^2 + \left.\dfrac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ \rho_{y-}v_{y-}w_{y-} + \left.\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial y}\right|_{y-} dy \end{pmatrix} dzdx
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

z **軸に垂直** xy **面下**

$$
\dot{m}_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} = \rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}dxdy = \rho_{z-}\begin{pmatrix} u_{z-}w_{z-} \\ v_{z-}w_{z-} \\ w_{z-}^2 \end{pmatrix} dxdy \tag{2.47}
$$

z 軸に垂直 xy 面上

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{z+}\boldsymbol{v}_{z+} &= \rho_{z+}w_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}dxdy \\
&= \left(\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} + \left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\
&= \begin{pmatrix} \rho_{z-}u_{z-}w_{z-} + \left.\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ \rho_{z-}v_{z-}w_{z-} + \left.\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ \rho_{z-}w_{z-}^2 + \left.\dfrac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}\right|_{z-} dz \end{pmatrix} dxdy
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[10]（2.1.6 節 [p.12]）。

x 軸に沿った出入 式 (2.43))− 式 (2.44[p.19)− 式 (2.44]

$$
\begin{aligned}
\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}dydz &- \left(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= -\left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz \\
&= -\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial x}\right|_{x-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

y 軸に沿った出入 式 (2.45))− 式 (2.46[p.20)− 式 (2.46]

$$
\begin{aligned}
\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}dydz &- \left(\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} + \left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\
&= -\left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz \\
&= -\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial y}\right|_{y-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}\right|_{y-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial y}\right|_{y-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

z 軸に沿った出入 式 (2.47))− 式 (2.48[p.20)− 式 (2.48]

$$
\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}dydz - \left(\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} + \left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy
$$

[10]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 − を加え逆にする。

$$
= -\left.\frac{\partial(\rho w \boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz
$$

$$
= -\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial z}\right|_{z-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial z}\right|_{z-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}\right|_{z-} \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.51}
$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.49))+ 式 (2.50)+ 式 (2.51[p.21)+ 式 (2.50)+ 式 (2.51] をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 [p.13])、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による運動量の出入は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial(\rho u \boldsymbol{v})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v \boldsymbol{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w \boldsymbol{v})}{\partial z}\right)dxdydz \\
= -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} \end{pmatrix} dxdydz \\
= -\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho u \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho v \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho w \boldsymbol{v}) \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.52}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.42)[19] と各面の質量流量の式 (2.27)-(2.32)[p.16] より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)[p.13] を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\dot{m}_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} = \rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}dydz = \rho \begin{pmatrix} u_{x-}^2 \\ u_{x-}v_{x-} \\ u_{x-}w_{x-} \end{pmatrix} dydz \tag{2.53}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}\boldsymbol{v}_{x+} &= \rho u_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}dydz \\
&= \rho\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\boldsymbol{v}_{x-}+\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned}
$$

$$= \rho\Bigg(u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \underbrace{u_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx + \boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx}_{\text{計算は付録の式 }(A.1)\text{p.72 参照}} + \underbrace{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\Bigg)dydz$$

$$= \rho\left(u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz$$

$$= \rho\begin{pmatrix} u_{x-}^2 + \left.\dfrac{\partial(u^2)}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ u_{x-}v_{x-} + \left.\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ u_{x-}w_{x-} + \left.\dfrac{\partial(uw)}{\partial x}\right|_{x-} dx \end{pmatrix} dydz \tag{2.54}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} = \rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}dzdx = \rho\begin{pmatrix} u_{y-}v_{y-} \\ v_{y-}^2 \\ v_{y-}w_{y-} \end{pmatrix} dzdx \tag{2.55}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned}\dot{m}_{y+}\boldsymbol{v}_{y+} &= \rho v_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}dzdx \\ &= \rho\left(v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} + \left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\ &= \rho\begin{pmatrix} u_{y-}v_{y-} + \left.\dfrac{\partial(uv)}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ v_{y-}^2 + \left.\dfrac{\partial(v^2)}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ v_{y-}w_{y-} + \left.\dfrac{\partial(vw)}{\partial y}\right|_{y-} dy \end{pmatrix} dzdx\end{aligned} \tag{2.56}$$

z 軸に垂直 xy 面下

$$\dot{m}_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} = \rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}dxdy = \rho\begin{pmatrix} u_{z-}w_{z-} \\ v_{z-}w_{z-} \\ w_{z-}^2 \end{pmatrix} dxdy \tag{2.57}$$

z 軸に垂直 xy 面上

$$\begin{aligned}\dot{m}_{z+}\boldsymbol{v}_{z+} &= \rho w_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}dxdy \\ &= \rho\left(w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} + \left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\ &= \rho\begin{pmatrix} u_{z-}w_{z-} + \left.\dfrac{\partial(uw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ v_{z-}w_{z-} + \left.\dfrac{\partial(vw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ w_{z-}^2 + \left.\dfrac{\partial(w^2)}{\partial z}\right|_{z-} dz \end{pmatrix} dxdy\end{aligned} \tag{2.58}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[11]（2.1.6 節 p.12）。

x **軸に沿った出入** 式 (2.53)− 式 (2.54)

$$
\begin{aligned}
&\rho u_{x-} \boldsymbol{v}_{x-} dydz - \rho\left(u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dx\right) dydz \\
&= -\rho \left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz \\
&= -\rho \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\frac{\partial(uv)}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\frac{\partial(uw)}{\partial x}\right|_{x-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

y **軸に沿った出入** 式 (2.55)− 式 (2.56)

$$
\begin{aligned}
&\rho v_{y-} \boldsymbol{v}_{y-} dydz - \rho\left(v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} + \left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dy\right) dzdx \\
&= -\rho \left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz \\
&= -\rho \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right|_{y-} \\ \left.\frac{\partial(v^2)}{\partial y}\right|_{y-} \\ \left.\frac{\partial(vw)}{\partial y}\right|_{y-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

z **軸に沿った出入** 式 (2.57)− 式 (2.58)

$$
\begin{aligned}
&\rho w_{z-} \boldsymbol{v}_{z-} dydz - \rho\left(w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} + \left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dz\right) dxdy \\
&= -\rho \left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz \\
&= -\rho \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial(uw)}{\partial z}\right|_{z-} \\ \left.\frac{\partial(vw)}{\partial z}\right|_{z-} \\ \left.\frac{\partial(w^2)}{\partial z}\right|_{z-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.59)+ 式 (2.60)+ 式 (2.61) をとり、変形[12]し、質量保存式 (2.38)p.18 を代入する。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による運動量の出入は次式で表される。

[11]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 − を加え逆にする。

[12]計算は付録の式 (A.2)p.72 参照

$$
\begin{aligned}
&-\rho\left(\frac{\partial(u\boldsymbol{v})}{\partial x}+\frac{\partial(v\boldsymbol{v})}{\partial y}+\frac{\partial(w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right)dxdydz \\
&=-\rho\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial(u^2)}{\partial x}+\dfrac{\partial(uv)}{\partial y}+\dfrac{\partial(uw)}{\partial z} \\
\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}+\dfrac{\partial(v^2)}{\partial y}+\dfrac{\partial(vw)}{\partial z} \\
\dfrac{\partial(uw)}{\partial x}+\dfrac{\partial(vw)}{\partial y}+\dfrac{\partial(w^2)}{\partial z}
\end{pmatrix}dxdydz \\
&=-\rho\begin{pmatrix}
2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\dfrac{\partial w}{\partial z}+w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\
v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}+v\dfrac{\partial w}{\partial z}+w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\
w\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial v}{\partial y}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+2w\dfrac{\partial w}{\partial z}
\end{pmatrix}dxdydz \\
&=-\rho\begin{pmatrix}
u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+u\underbrace{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}} \\
u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+v\underbrace{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}} \\
u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+w\underbrace{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}
\end{pmatrix}dxdydz \\
&=-\rho\begin{pmatrix}
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u \\
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v \\
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w
\end{pmatrix}dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

2.3.3 表面に作用する力

それぞれの面に作用する力を、図 2.5 に示すように面に垂直方向応力を σ [Pa]、平行な剪断応力を τ [Pa] とし、xyz 方向の成分に分けて考える。外に向かう力が正となるように方向を決める。

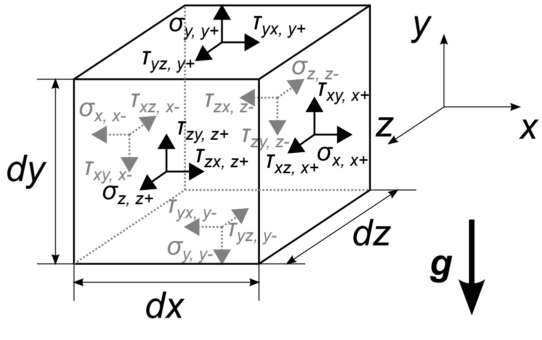

図 2.5 Control Volume

計算には下記の圧力の式 (2.63)[13]と垂直応力による変形時の釣り合いより求めた式 (2.64) との関係 [1] を用いる。

$$P = -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{2.63}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \sigma_y - \sigma_z &= 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \sigma_z - \sigma_x &= 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

式 (2.63)p.26 へ式 (2.64)p.26 を変形して代入し、それぞれの方向の垂直応力 σ [Pa] は次のように表される。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -P + \mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) \\ \sigma_y &= -P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -P + \mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) \\ \sigma_z &= -P + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -P + \mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.65}$$

平行方向の剪断応力 τ [Pa] はニュートンの粘性法則より、それぞれ次のように表される [1]。図 2.5 のように下添え字の最初の文字が面に垂直な軸を、次の文字が方向を表している。

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.66}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

式 (2.65)p.26 と式 (2.66)p.26 から、xyz 軸に垂直な面それぞれに掛かる力を求める。力は外への方向が正となっている。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x,x-}dydz \\ \tau_{xy,x-}dydz \\ \tau_{xz,x-}dydz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{x-} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right) \end{pmatrix} dydz \tag{2.67}$$

[13] この式中の P [Pa] は流体力学的圧力である。詳しくは参考文献 [1] を参照のこと。

x **軸に垂直** yz **面右**

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x,x+}dydz \\ \tau_{xy,x+}dydz \\ \tau_{xz,x+}dydz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{x+} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x+}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x+} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x+}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+}\right) \end{pmatrix} dydz$$

$$= \begin{pmatrix} -\left(P_{x-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx\right) + \mu\left\{\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right)dx\right\} \\ \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right)dx\right\} \\ \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)dx\right\} \end{pmatrix} dydz \tag{2.68}$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$\begin{pmatrix} \tau_{yx,y-}dzdx \\ \sigma_{y,y-}dzdx \\ \tau_{yz,y-}dzdx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-}\right) \\ -P_{y-} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y-}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}\right) \end{pmatrix} dzdx \tag{2.69}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\begin{pmatrix} \tau_{yx,y+}dzdx \\ \sigma_{y,y+}dzdx \\ \tau_{yz,y+}dzdx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y+}\right) \\ -P_{y+} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y+} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y+}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y+}\right) \end{pmatrix} dzdx$$

$$= \begin{pmatrix} \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-}\right)dy\right\} \\ -\left(P_{y-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y-} dy\right) + \mu\left\{\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y-}\right)dy\right\} \\ \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}\right)dy\right\} \end{pmatrix} dzdx \tag{2.70}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$\begin{pmatrix} \tau_{zx,z-}dxdy \\ \tau_{zy,z-}dxdy \\ \sigma_{z,z-}dxdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-}\right) \\ -P_{z-} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z-}\right) \end{pmatrix} dxdy \tag{2.71}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{pmatrix} \tau_{zx,z+}dxdy \\ \tau_{zy,z+}dxdy \\ \sigma_{z,z+}dxdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z+} \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z+} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z+} \right) \\ -P_{z+} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z+} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z+}\right) \end{pmatrix} dxdy$$

$$= \begin{pmatrix} \mu\left\{ \left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} \right)dz \right\} \\ \mu\left\{ \left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} \right)dz \right\} \\ -\left(P_{z-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial z}\right|_{z-} dz\right) + \mu\left\{ \left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z-}\right)dz \right\} \end{pmatrix} dxdy \tag{2.72}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った作用を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリューム内を正の方向へ加速させる力を正、負の方向へ加速させる力を負となるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[14]。

x 軸に沿った作用 $-$ 式 (2.67)+ 式 (2.68)

$$\begin{pmatrix} -\sigma_{x,x-} + \sigma_{x,x+} \\ -\tau_{xy,x-} + \tau_{xy,x+} \\ -\tau_{xz,x-} + \tau_{xz,x+} \end{pmatrix} dydz$$

$$= \begin{pmatrix} -\left\{ -P_{x-} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right) \right\} + \left[-\left(P_{x-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx\right) \right. \\ \left. +\mu\left\{ \left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right)dx \right\} \right] \\ -\left\{ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} \right) \right\} + \left[\mu\left\{ \left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} \right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} \right)dx \right\} \right] \\ -\left\{ \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} \right) \right\} + \left[\mu\left\{ \left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} \right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} \right)dx \right\} \right] \end{pmatrix} dydz$$

$$= \begin{pmatrix} -\left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx + \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right)dx\} \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} \right)dx \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} \right)dx \end{pmatrix} dydz$$

---

[14] コントロールボリュームから出る方向に働く力を正としているので、例えば x 軸に垂直な右の面では力が正となる方向でコントロールボリューム内が x 軸の正の方向へ加速されるためそのままでよい。しかし、左の面では正の方向で x 軸の負の方向へ加速され、負の方向で正の方向へ加速されるため負号 $-$ を加え逆にする。

$$
= \begin{pmatrix} -\left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} + \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right) \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right) \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right) \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.73}
$$

y **軸に沿った作用** – 式 (2.69)+ 式 (2.70)

$$
\begin{pmatrix} -\tau_{yx,y-} + \tau_{yx,y+} \\ -\sigma_{y,y-} + \sigma_{y,y+} \\ -\tau_{yz,y-} + \tau_{yz,y+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix} \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-}\right) \\ -\left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y-} + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y-}\right) \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}\right) \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.74}
$$

z **軸に沿った作用** – 式 (2.71)+ 式 (2.72)

$$
\begin{pmatrix} -\tau_{zx,z-} + \tau_{zx,z+} \\ -\tau_{zy,z-} + \tau_{zy,z+} \\ -\sigma_{z,z-} + \sigma_{z,z+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix} \mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-}\right) \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-}\right) \\ -\left.\dfrac{\partial P}{\partial z}\right|_{z-} + \mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z-}\right) \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.75}
$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.73)+ 式 (2.74)+ 式 (2.75) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での表面に作用する力は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + \mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) + \mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(2\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) \end{pmatrix} dxdydz \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \end{pmatrix} dxdydz \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}u + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}v + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}w + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
$$

$$= \left[-\boldsymbol{\nabla} P + \mu \left\{ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \right\} \right] dxdydz \tag{2.76}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

密度変化を考慮しないため、質量保存式（連続の式 (2.38)[p.18]）より $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$ となり、式 (2.65)[p.26] は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \tag{2.77}$$

σ の式 (2.77)[p.30] と τ の式 (2.66)[p.26] から、それぞれの面に掛かる力を求める。力は外への方向が正となっている。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x,x-} dydz \\ \tau_{xy,x-} dydz \\ \tau_{xz,x-} dydz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{x-} + 2\mu \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} \\ \mu \left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} \right) \\ \mu \left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} \right) \end{pmatrix} dydz \tag{2.78}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x,x+} dydz \\ \tau_{xy,x+} dydz \\ \tau_{xz,x+} dydz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{x+} + 2\mu \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+} \\ \mu \left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x+} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x+} \right) \\ \mu \left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+} \right) \end{pmatrix} dydz$$

$$= \begin{pmatrix} -\left(P_{x-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx \right) + 2\mu \left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \right) \\ \mu \left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x-} dx + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x-} dx \right) \\ \mu \left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{x-} dx + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \right) \end{pmatrix} dydz \tag{2.79}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\begin{pmatrix} \tau_{yx,y-} dzdx \\ \sigma_{y,y-} dzdx \\ \tau_{yz,y-} dzdx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-} \right) \\ -P_{y-} + 2\mu \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} \\ \mu \left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} \right) \end{pmatrix} dzdx \tag{2.80}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{pmatrix} \tau_{yx,y+}dzdx \\ \\ \sigma_{y,y+}dzdx \\ \\ \tau_{yz,y+}dzdx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y+} \right) \\ -P_{y+} + 2\mu \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y+} \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y+} \right) \end{pmatrix} dzdx$$

$$= \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y-} dy + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|_{y-} dy \right) \\ -\left(P_{y-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y-} dy \right) + 2\mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{y-} dy \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right|_{y-} dy + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y-} dy \right) \end{pmatrix} dzdx \tag{2.81}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\begin{pmatrix} \tau_{zx,z-}dxdy \\ \\ \tau_{zy,z-}dxdy \\ \\ \sigma_{z,z-}dxdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} \right) \\ -P_{z-} + 2\mu \left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} \end{pmatrix} dxdy \tag{2.82}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{pmatrix} \tau_{zx,z+}dxdy \\ \\ \tau_{zy,z+}dxdy \\ \\ \sigma_{z,z+}dxdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z+} \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z+} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z+} \right) \\ -P_{z+} + 2\mu \left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z+} \end{pmatrix} dxdy$$

$$= \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{z-} dz + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right|_{z-} dz \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right|_{z-} dz + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_{z-} dz \right) \\ -\left(P_{z-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial z}\right|_{z-} dz \right) + 2\mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right|_{z-} dz \right) \end{pmatrix} dxdy \tag{2.83}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った作用を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリューム内を正の方向へ加速させる力を正、負の方向へ加速させる力を負となるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[15]。

[15]コントロールボリュームから出る方向に働く力を正としているので、例えば x 軸に垂直な右の面では力が正となる方向でコントロールボリューム内が x 軸の正の方向へ加速されるためそのままでよい。しかし、左の面では正の方向で x 軸の負の方向へ加速され、負の方向で正の方向へ加速されるため負号 $-$ を加え逆にする。

x **軸に沿った作用** − 式 (2.78)+ 式 (2.79)

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\sigma_{x,x-}+\sigma_{x,x+} \\ -\tau_{xy,x-}+\tau_{xy,x+} \\ -\tau_{xz,x-}+\tau_{xz,x+} \end{pmatrix} dydz \\
&= \begin{pmatrix}
-\left\{-P_{x-}+2\mu \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\right\}+\left\{-\left(P_{x-}+\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)+2\mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x-} dx\right)\right\} \\
-\left\{\mu\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right)\right\}+\left\{\mu\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x-} dx+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x-} dx\right)\right\} \\
-\left\{\mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)\right\}+\left\{\mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{x-} dx+\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x-} dx\right)\right\}
\end{pmatrix} dydz \\
&= \begin{pmatrix}
-\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx+2\mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \\
\mu \left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x-} dx+\mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x-} dx \\
\mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{x-} dx+\mu \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x-} dx
\end{pmatrix} dydz \\
&= \begin{pmatrix}
-\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-}+2\mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x-} \\
\mu\left(\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x-}\right) \\
\mu\left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x-}\right)
\end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

y **軸に沿った作用** − 式 (2.80)+ 式 (2.81)

$$
\begin{pmatrix} -\tau_{yx,y-}+\tau_{yx,y+} \\ -\sigma_{y,y-}+\sigma_{y,y+} \\ -\tau_{yz,y-}+\tau_{yz,y+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix}
\mu\left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y-}+\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|_{y-}\right) \\
-\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y-}+2\mu \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{y-} \\
\mu\left(\left.\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right|_{y-}+\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y-}\right)
\end{pmatrix} dxdydz \tag{2.85}
$$

z **軸に沿った作用** − 式 (2.82)+ 式 (2.83)

$$
\begin{pmatrix} -\tau_{zx,z-}+\tau_{zx,z+} \\ -\tau_{zy,z-}+\tau_{zy,z+} \\ -\sigma_{z,z-}+\sigma_{z,z+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix}
\mu\left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{z-}+\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right|_{z-}\right) \\
\mu\left(\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right|_{z-}+\left.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_{z-}\right) \\
-\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z-}+2\mu \left.\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right|_{z-}
\end{pmatrix} dxdydz \tag{2.86}
$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.84)+ 式 (2.85)+ 式 (2.86) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での表面に作用する力は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
-\dfrac{\partial P}{\partial x}+2\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)\\
\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-\dfrac{\partial P}{\partial y}+2\mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\dfrac{\partial P}{\partial z}+2\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}
\end{pmatrix}dxdydz\\
&=\begin{pmatrix}
-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
-\dfrac{\partial P}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
-\dfrac{\partial P}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{pmatrix}dxdydz\\
&=\begin{pmatrix}
-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\
-\dfrac{\partial P}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\
-\dfrac{\partial P}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}w
\end{pmatrix}dxdydz\\
&=\{-\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\}\,dxdydz
\end{aligned}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）では、式 (2.38)p.18 より $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$ であるので、次式となる。

$$
(-\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})\,dxdydz \tag{2.87}
$$

2.3.4 体積に作用する力

体積に作用する力は重力のみを考慮し、重力加速度は y 軸に平行下向きに働く $\boldsymbol{g}=(0,-g,0)$ [m/s^2] とすると、体積力（重力）は次式で表される。

$$
m\boldsymbol{g}=\rho\boldsymbol{g}dxdydz=\rho\begin{pmatrix}0\\-g\\0\end{pmatrix}dxdydz \tag{2.88}
$$

2.3.5 運動量保存式

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

式 (2.39)p.18 へ、式 (2.40)p.19、式 (2.52)p.22、式 (2.76)p.30、式 (2.88)p.33 を入れると、以下の式が得られる。

$$\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dxdydx=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho u\boldsymbol{v})\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho v\boldsymbol{v})\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho w\boldsymbol{v})\end{pmatrix}dxdydz+\left(-\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right)dxdydz+\rho\boldsymbol{g}dxdydz$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho u\boldsymbol{v})\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho v\boldsymbol{v})\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho w\boldsymbol{v})\end{pmatrix}-\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\rho\boldsymbol{g}$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\begin{pmatrix}\rho u\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u+u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\\ \rho v\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v+v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\\ \rho w\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w+w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\end{pmatrix}-\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\rho\boldsymbol{g} \tag{2.89}$$

上式を整理するために質量保存式 (2.37)p.18 を用いる。質量保存式 (2.37)p.18 の両辺に速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] を掛けると次式となる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}&=-\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\}\\ &=-\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}\{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\}\\ &=-\begin{pmatrix}\rho u\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\\ \rho v\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\\ \rho w\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\end{pmatrix}\end{aligned}$$

上式を先ほど求めた運動量保存の式 (2.89)p.34 から引き密度 ρ [kg/m^3] で割ると次式が得られる。ここで、ν [m^2/s] は動粘性係数であり粘性係数 μ [Pa·s] により $\nu=\mu/\rho$ と表される。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix}-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P+\nu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\nu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{g} \tag{2.90}$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial t}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}+\nu\left\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}u+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right\}\\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}+\nu\left\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}v+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right\}-g\\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}+\nu\left\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}w+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right\}\end{pmatrix}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

式 (2.39)$^{\text{p.18}}$ へ、式 (2.41)$^{\text{p.19}}$、式 (2.62)$^{\text{p.25}}$、式 (2.87)$^{\text{p.33}}$、式 (2.88)$^{\text{p.33}}$ を入れると、以下の式が得られる。ここで、ν [m^2/s] は動粘性係数であり粘性係数 μ [Pa·s] により $\nu = \mu/\rho$ と表される。

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dxdydx = -\rho\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix}dxdydz + \left(-\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\right)dxdydz + \rho\boldsymbol{g}dxdydz$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\rho\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix} - \boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{g} \tag{2.91}$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial t}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}v - g\\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix} \tag{2.92}$$

2.4 エネルギー保存

保存の対象として以下のエネルギーを考える。

- 運動エネルギー（運動している物体が持っているエネルギー） $\dfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$
- 位置エネルギー（重力によるエネルギー） mgh
- 界面エネルギー（界面を持つ流体間でのエネルギー　ここでは考慮しない）
- 内部エネルギー（系の持っているエネルギーから、運動・位置・界面エネルギーを除いたもの。主に顕熱 mc_vT と潜熱であるが、ここでは顕熱のみを考慮する。）

ここで m [kg] は保存対象の質量、v [m/s] は速度、g [m/s^2] は重力加速度、h [m] は基準からの高さ、c_v [J/(K·kg)] は定積比熱、T [K] は温度である。

エネルギーの保存式は閉じた系では内部エネルギー U[J] のみを考慮し熱力学の第一法則より次式となる。

$$\Delta U = Q + W$$

ここで、ΔU[J] は系の保有する内部エネルギーの変化量、Q[J] は熱、W[J] は仕事である。この系の内部エネルギーの時間変化量は、時間あたりに伝わる熱 $\dot{Q}$[W] と時間あたりの仕事 $\dot{W}$[W] で次のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q} + \dot{W} \tag{2.93}$$

今は開いた系（流れ系）を考えているので、上式 (2.93)p.35 の左辺の全エネルギー（運動・位置・内部エネルギー）の時間変化と右辺の“ 時間あたりに伝わる熱 ”、“ 時間あたりの仕事 ”に右辺の対流により運ばれる運動・位置・内部エネルギーが加えられる。“ 時間あたりに伝わる熱 ”と“ 時間あたりの仕事 ”が式 (2.4)p.8 における“ 境界面での作用による出入量 ”に、“ 生成エネルギー ”が“ 体積に対する変化量 ”に対応する。このことから、エネルギー方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{持っている全エネルギー}}{\partial t} &= \text{対流による全エネルギーの出入} + \text{時間あたりに伝わる熱} \\ &\quad + \text{時間あたりの仕事} + \text{生成エネルギー}\end{aligned} \tag{2.94}$$

式 (2.94)p.36 の各項について考えていく。その際、生成エネルギーは考慮しない。

2.4.1 持っている全エネルギーの時間変化

コントロールボリュームの体積は $dxdydz$ [m³]、質量 m [kg]$= \rho dxdydz$ で表されるので、重力方向を y 方向とすれば、各エネルギーの時間変化は次のように表すことが出来る。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

運動エネルギー （計算は付録の式 (A.3)p.72 参照）

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}dxdydz\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial t}dxdydz \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dxdydz \\ &= \frac{1}{2}\left(2\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dxdydz \\ &= \left(\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dxdydz\end{aligned}$$

位置エネルギー

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho gydxdydz) = \frac{\partial\rho}{\partial t}gydxdydz$$

内部エネルギー （顕熱）

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_v Tdxdydz) &= c_v\frac{\partial(\rho T)}{\partial t}dxdydz \\ &= c_v\left(\rho\frac{\partial T}{\partial t} + T\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dxdydz\end{aligned}$$

以上のエネルギーの時間変化の和 (運動エネルギー＋位置エネルギー＋内部エネルギー) から、持っている全エネルギーの時間変化は次式で表される。

$$\left\{\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t}gy + c_v\left(\rho\frac{\partial T}{\partial t} + T\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\right\}dxdydz$$

$$= \left\{\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + gy + c_v T\right)\right\} dxdydz \tag{2.95}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

運動エネルギー （計算は付録の式 (A.3)p.72 参照）

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}dxdydz\right) = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial t}dxdydz$$
$$= \rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dxdydz$$

位置エネルギー （密度一定の仮定より）

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho gy dxdydz) = 0$$

内部エネルギー （顕熱）

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_v T dxdydz) = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz$$

以上のエネルギーの時間変化の和 (運動エネルギー＋位置エネルギー＋内部エネルギー) から、持っている全エネルギーの時間変化は次式で表される。

$$\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)dxdydz \tag{2.96}$$

2.4.2 対流によるエネルギーの出入

対流による時間あたりのエネルギーの出入は、“ 質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] ×質量あたりのエネルギー [J/kg]”で表すことが出来る。運動エネルギー・位置エネルギー・内部エネルギーそれぞれについて考える。

運動エネルギー

質量当たりの運動エネルギーは $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ [m^2/s^2] であるので、対流による出入は質量流量×質量当たりの運動エネルギーで次式で表される（2.1.4[10] 節)。

$$\dot{m}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.97}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.97)[p.37] と各面の質量流量の式 (2.17)-(2.22)[p.15] より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)[p.13] を用いて求める。

x **軸に垂直** yz **面左**

$$\frac{1}{2}\dot{m}_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}=\frac{1}{2}\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}dydz \tag{2.98}$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\dot{m}_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}\cdot\boldsymbol{v}_{x+}=\frac{1}{2}\rho_{x+}u_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}\cdot\boldsymbol{v}_{x+}dydz\\
&=\frac{1}{2}\left(\rho_{x-}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\boldsymbol{v}_{x-}+\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)^2dydz\\
&=\frac{1}{2}\Biggl\{\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}+2\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx+\rho_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\\
&\quad\underbrace{+\rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^2+2\rho_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^2+2u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する(2.1.7 節 p.13)}}\\
&\quad\underbrace{+\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2+\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^3+u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^3}_{\text{高位の無限小であるため無視する(2.1.7 節 p.13)}}\\
&\quad\underbrace{+2\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^3+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^4}_{\text{高位の無限小であるため無視する(2.1.7 節 p.13)}}\Biggr\}dydz\\
&=\frac{1}{2}\left(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}+\left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned} \tag{2.99}$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$\frac{1}{2}\dot{m}_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-}=\frac{1}{2}\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-}dzdx \tag{2.100}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\dot{m}_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}\cdot\boldsymbol{v}_{y+}&=\frac{1}{2}\rho_{y+}v_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}\cdot\boldsymbol{v}_{y+}dzdx\\
&=\frac{1}{2}\left(\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-}+\left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx
\end{aligned} \tag{2.101}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$\frac{1}{2}\dot{m}_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}=\frac{1}{2}\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}dxdy \tag{2.102}$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\dot{m}_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}\cdot\boldsymbol{v}_{z+}&=\frac{1}{2}\rho_{z+}w_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}\cdot\boldsymbol{v}_{z+}dxdy\\
&=\frac{1}{2}\left(\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}+\left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy
\end{aligned} \tag{2.103}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[16]（2.1.6 節 p.12）。

[16]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 $-$ を加え逆にする。

x **軸に沿った出入** 式 (2.98)− 式 (2.99)

$$\frac{1}{2}\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}dydz-\frac{1}{2}\left(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}+\left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz$$
$$=-\frac{1}{2}\left.\frac{\partial\left(\rho u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial x}\right|_{x-}dxdydz \tag{2.104}$$

y **軸に沿った出入** 式 (2.100)− 式 (2.101)

$$\frac{1}{2}\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-}dzdx-\frac{1}{2}\left(\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-}+\left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx$$
$$=-\frac{1}{2}\left.\frac{\partial\left(\rho v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial y}\right|_{y-}dxdydz \tag{2.105}$$

z **軸に沿った出入** 式 (2.102)− 式 (2.103)

$$\frac{1}{2}\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}dxdy-\frac{1}{2}\left(\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}+\left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy$$
$$=-\frac{1}{2}\left.\frac{\partial\left(\rho w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial z}\right|_{z-}dxdydz \tag{2.106}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.104)+ 式 (2.105)+ 式 (2.106) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による運動エネルギーの出入は次式で表される[17] 。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.13)。

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\rho u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial z}\right)dxdydx$$
$$=-\frac{1}{2}\Bigg\{\left(\rho u\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}u\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\left(\rho v\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial v}{\partial y}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)$$

---

[17]式を完全に展開すると以下のようになる。三行目の式から示す。

$$-\frac{1}{2}\left\{\rho\left(u\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x}+v\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y}+w\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z}\right)+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydx$$
$$=-\frac{1}{2}\Bigg\{\rho\left(u\frac{\partial(u^2+v^2+w^2)}{\partial x}+v\frac{\partial(u^2+v^2+w^2)}{\partial y}+w\frac{\partial(u^2+v^2+w^2)}{\partial z}\right)$$
$$+\rho(u^2+v^2+w^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+(u^2+v^2+w^2)\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\Bigg\}dxdydz$$
$$=-\frac{1}{2}\Bigg\{\rho\left(u\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+u\frac{\partial(v^2)}{\partial x}+u\frac{\partial(w^2)}{\partial x}+v\frac{\partial(u^2)}{\partial y}+v\frac{\partial(v^2)}{\partial y}+v\frac{\partial(w^2)}{\partial y}+w\frac{\partial(u^2)}{\partial z}+w\frac{\partial(v^2)}{\partial z}+w\frac{\partial(w^2)}{\partial z}\right)$$
$$+\rho\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial v}{\partial y}+u^2\frac{\partial w}{\partial z}+v^2\frac{\partial u}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+v^2\frac{\partial w}{\partial z}+w^2\frac{\partial u}{\partial x}+w^2\frac{\partial v}{\partial y}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+\left(u^3\frac{\partial\rho}{\partial x}+u^2v\frac{\partial\rho}{\partial y}+u^2w\frac{\partial\rho}{\partial z}+uv^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+v^3\frac{\partial\rho}{\partial y}+v^2w\frac{\partial\rho}{\partial z}+uw^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+vw^2\frac{\partial\rho}{\partial y}+w^3\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\Bigg\}dxdydz$$
$$=-\frac{1}{2}\Bigg\{2\rho\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}+uv\frac{\partial v}{\partial x}+uw\frac{\partial w}{\partial x}+uv\frac{\partial u}{\partial y}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+vw\frac{\partial w}{\partial y}+uw\frac{\partial u}{\partial z}+vw\frac{\partial v}{\partial z}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+\rho\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial v}{\partial y}+u^2\frac{\partial w}{\partial z}+v^2\frac{\partial u}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+v^2\frac{\partial w}{\partial z}+w^2\frac{\partial u}{\partial x}+w^2\frac{\partial v}{\partial y}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+\left(u^3\frac{\partial\rho}{\partial x}+u^2v\frac{\partial\rho}{\partial y}+u^2w\frac{\partial\rho}{\partial z}+uv^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+v^3\frac{\partial\rho}{\partial y}+v^2w\frac{\partial\rho}{\partial z}+uw^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+vw^2\frac{\partial\rho}{\partial y}+w^3\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\Bigg\}dxdydz$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \left(\rho w\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial w}{\partial z} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\Bigg\}dxdydx \\
&= -\frac{1}{2}\Bigg\{\rho\left(u\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x} + v\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y} + w\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z}\right) + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\Bigg\}dxdydx \\
&= -\frac{1}{2}\{\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho)\}dxdydx \\
&= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v})dxdydz
\end{aligned} \tag{2.107}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.97)p.37 と各面の質量流量の式 (2.27)-(2.32)p.16 より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)p.13 を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\frac{1}{2}\dot{m}_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-} = \frac{1}{2}\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}dydz \tag{2.108}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\dot{m}_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}\cdot\boldsymbol{v}_{x+} = \frac{1}{2}\rho u_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}\cdot\boldsymbol{v}_{x+}dydz \\
=&\frac{1}{2}\rho\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)^2 dydz \\
=&\frac{1}{2}\Bigg\{\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-} + 2\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx + \rho\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx \\
&\underbrace{+\rho u_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\cdot\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^2 + 2\rho\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^2 + \rho\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\cdot\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^3}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}} \\
=&\frac{1}{2}\left(\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-} + \rho\left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned} \tag{2.109}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$
\frac{1}{2}\dot{m}_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-} = \frac{1}{2}\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-}dzdx \tag{2.110}
$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\dot{m}_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}\cdot\boldsymbol{v}_{y+} &= \frac{1}{2}\rho v_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}\cdot\boldsymbol{v}_{y+}dzdx \\
&= \frac{1}{2}\left(\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-} + \rho\left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx
\end{aligned} \tag{2.111}
$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$
\frac{1}{2}\dot{m}_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-} = \frac{1}{2}\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}dxdy \tag{2.112}
$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{m}_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}\cdot\boldsymbol{v}_{z+} &= \frac{1}{2}\rho w_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}\cdot\boldsymbol{v}_{z+}dxdy \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}+\rho\left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy\end{aligned} \tag{2.113}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[18]（2.1.6 節 $^{\text{p.12}}$）。

x **軸に沿った出入** 式 (2.108)− 式 (2.109)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}dydz-\frac{1}{2}\left(\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\cdot\boldsymbol{v}_{x-}+\rho\left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\ &=-\frac{1}{2}\rho\left.\frac{\partial\left(u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial x}\right|_{x-}dxdydx\end{aligned} \tag{2.114}$$

y **軸に沿った出入** 式 (2.110)− 式 (2.111)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-}dzdx-\frac{1}{2}\left(\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}\cdot\boldsymbol{v}_{y-}+\rho\left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx \\ &=-\frac{1}{2}\rho\left.\frac{\partial\left(v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial y}\right|_{y-}dxdydx\end{aligned} \tag{2.115}$$

z **軸に沿った出入** 式 (2.112)− 式 (2.113)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}dxdy-\frac{1}{2}\left(\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}\cdot\boldsymbol{v}_{z-}+\rho\left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy \\ &=-\frac{1}{2}\rho\left.\frac{\partial\left(w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial z}\right|_{z-}dxdydx\end{aligned} \tag{2.116}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.114)+ 式 (2.115)+ 式 (2.116) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 $^{\text{p.13}}$)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による運動エネルギーの出入は次式で表される。

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\left(u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\partial z}\right)dxdydx \\ &=-\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial(uu^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uw^2)}{\partial x}+\frac{\partial(vu^2)}{\partial y}+\frac{\partial(vv^2)}{\partial y}+\frac{\partial(vw^2)}{\partial y}\right. \\ &\quad\left.+\frac{\partial(wu^2)}{\partial z}+\frac{\partial(wv^2)}{\partial z}+\frac{\partial(ww^2)}{\partial z}\right)dxdydx \\ &=-\frac{1}{2}\rho\left(u\frac{\partial u^2}{\partial x}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v^2}{\partial x}+v^2\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial w^2}{\partial x}+w^2\frac{\partial u}{\partial x}\right. \\ &\quad+v\frac{\partial u^2}{\partial y}+u^2\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial v^2}{\partial y}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial w^2}{\partial y}+w^2\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

[18]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 − を加え逆にする。

$$
\begin{aligned}
&+w\frac{\partial u^2}{\partial z}+u^2\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial v^2}{\partial z}+v^2\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial w^2}{\partial z}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\Biggr)dxdydx \\
=&-\frac{1}{2}\rho\Biggl\{u\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{\partial w^2}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial u^2}{\partial y}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial w^2}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial u^2}{\partial z}+\frac{\partial v^2}{\partial z}+\frac{\partial w^2}{\partial z}\right) \\
&+u^2\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}+v^2\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}+w^2\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}\Biggr\}dxdydx \\
=&-\frac{1}{2}\rho\left\{u\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x}+v\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y}+w\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z}\right\}dxdydz \\
=&-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

位置エネルギー

質量当たりの位置エネルギーは gy [m^2/s^2] であるので、対流による出入は質量流量×質量当たりの位置エネルギーで次式で表される（2.1.4[10] 節)。

$$
\dot{m}gy \tag{2.118}
$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.118)[p.42] と各面の質量流量の式 (2.17)-(2.22)[p.15] より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)[p.13] を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\dot{m}_{x-}g\left(y+\frac{dy}{2}\right)=\rho_{x-}gu_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \tag{2.119}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}g\left(y+\frac{dy}{2}\right)=&\rho_{x+}gu_{x+}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \\
=&g\left(\rho_{x-}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \\
=&g\Biggl\{\rho_{x-}u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+\rho_{x-}y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+u_{x-}y\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx \\
&\underbrace{+\frac{1}{2}\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dxdy+\frac{1}{2}u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dxdy+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\Biggr\}dydz \\
=&g\left\{\rho_{x-}u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+y\left.\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right\}dydz
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$
\dot{m}_{y-}gy=\rho_{y-}gv_{y-}ydzdx \tag{2.121}
$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{y+}g(y+dy) =&\rho_{y+}gv_{y+}(y+dy)dzdx \\
=&g\left(\rho_{y-}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)\left(v_{y-}+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)(y+dy)dzdx \\
=&g\Biggl(\rho_{y-}v_{y-}y+\rho_{y-}v_{y-}dy+\rho_{y-}y\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy+v_{y-}y\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-}dy \\
&\underbrace{+\rho_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy^2+v_{y-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-}dy^2+y\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy^2+\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy^3}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\Biggr)dzdx \\
=&g\left(\rho_{y-}v_{y-}y+y\left.\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right|_{y-}dy+\rho_{y-}v_{y-}dy\right)dzdx \\
=&g\left(\rho_{y-}v_{y-}y+\left.\frac{\partial(\rho vy)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx
\end{aligned} \tag{2.122}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$\dot{m}_{z-}g\left(y+\frac{dy}{2}\right)=\rho_{z-}gw_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy \tag{2.123}$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{z+}g\left(y+\frac{dy}{2}\right)&=\rho_{z+}gw_{z+}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy \\
&=g\left\{\rho_{z-}w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+y\left.\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right\}dxdy
\end{aligned} \tag{2.124}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[19]（2.1.6 節 $^{\text{p.12}}$）。

x **軸に沿った出入** 式 (2.119)− 式 (2.120)

$$\begin{aligned}
&\rho_{x-}gu_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz-g\left\{\rho_{x-}u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+y\left.\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right\}dydz \\
&\quad=-gy\left.\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right|_{x-}dxdydz
\end{aligned} \tag{2.125}$$

y **軸に沿った出入** 式 (2.121)− 式 (2.122)

$$\begin{aligned}
&\rho_{y-}gv_{y-}ydzdx-g\left(\rho_{y-}v_{y-}y+\left.\frac{\partial(\rho vy)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx \\
&\quad=-g\left.\frac{\partial(\rho vy)}{\partial y}\right|_{y-}dxdydz
\end{aligned} \tag{2.126}$$

z **軸に沿った出入** 式 (2.123)− 式 (2.124)

$$\rho_{z-}gw_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy-g\left\{\rho_{z-}w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+y\left.\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right\}dxdy$$

[19]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 − を加え逆にする。

$$= -gy \left. \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right|_{z-} dxdydz \tag{2.127}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.125)+ 式 (2.126)+ 式 (2.127) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による位置エネルギーの出入は次式で表される。

$$\begin{aligned}
& -g\left(y\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v y)}{\partial y} + y\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -g\left(\rho y\frac{\partial u}{\partial x} + uy\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho v\frac{\partial y}{\partial y} + \rho y\frac{\partial v}{\partial y} + vy\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho y\frac{\partial w}{\partial z} + wy\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -g\left\{\rho y\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + y\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho v\frac{\partial y}{\partial y}\right\}dxdydz \\
&= -g(\rho y \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho + \rho v)dxdydz \\
&= -g(y\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) + \rho v)dxdydz \qquad (2.128) \\
&= -g\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}y)dxdydz
\end{aligned}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.118)p.42 と各面の質量流量の式 (2.27)-(2.32)p.16 より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)p.13 を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\dot{m}_{x-}g\left(y+\frac{dy}{2}\right) = \rho g u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \tag{2.129}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}g\left(y+\frac{dy}{2}\right) &= \rho g u_{x+}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \\
&= \rho g\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \\
&= \rho g\left\{u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right) + y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx \quad \underbrace{+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dxdy}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\right\}dydz \\
&= \rho g\left\{u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right) + y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right\}dydz \qquad (2.130)
\end{aligned}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-}gy = \rho g v_{y-} ydzdx \tag{2.131}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{y+}g(y+dy) &= \rho g v_{y+}(y+dy)dzdx \\
&= \rho g\left(v_{y-} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)(y+dy)dzdx \\
&= \rho g\Bigg(v_{y-}y + y\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy + v_{y-}dy \quad \underbrace{+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\Bigg)dzdx \\
&= \rho g\left(v_{y-}y + \left.\frac{\partial (vy)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx
\end{aligned} \tag{2.132}
$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$
\dot{m}_{z-}g\left(y+\frac{dy}{2}\right) = \rho g w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy \tag{2.133}
$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{z+}g\left(y+\frac{dy}{2}\right) &= \rho g w_{z+}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy \\
&= \rho g\left\{w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right) + y\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz\right\}dxdy
\end{aligned} \tag{2.134}
$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[20]（2.1.6 節 p.12）。

x **軸に沿った出入** 式 (2.129)− 式 (2.130)

$$
\begin{aligned}
&\rho g u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz - \rho g\left\{u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right) + y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\right\}dydz \\
&= -\rho g y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.135}
$$

y **軸に沿った出入** 式 (2.131)− 式 (2.132)

$$
\begin{aligned}
&\rho g v_{y-} y dzdx - \rho g\left(v_{y-}y + \left.\frac{\partial (vy)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\
&= -\rho g\left.\frac{\partial (vy)}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.136}
$$

z **軸に沿った出入** 式 (2.133)− 式 (2.134)

$$
\begin{aligned}
&\rho g w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy - \rho g\left\{w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right) + y\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz\right\}dxdy \\
&= -\rho g y\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.137}
$$

[20]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 $-$ を加え逆にする。

xyz 軸での出入の総和、式 (2.135)+ 式 (2.136)+ 式 (2.137) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による位置エネルギーの出入は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
& -\rho g\left(y\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial (vy)}{\partial y}+y\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -\rho g\left(y\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial y}{\partial y}+y\frac{\partial v}{\partial y}+y\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -\rho g\left\{v\frac{\partial y}{\partial y}+y\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}\right\}dxdydz \\
&= -\rho g v dxdydz \\
&= \rho \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.138}
$$

内部エネルギー

質量当たりの内部エネルギー（顕熱）は c_vT [J/kg] であるので、対流による出入は質量流量×質量当たりの内部エネルギーで次式で表される（2.1.4[10] 節)。

$$
\dot{m}c_vT \tag{2.139}
$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.139)p.46 と各面の質量流量の式 (2.17)-(2.22)p.15 より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)p.13 を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\dot{m}_{x-}c_vT_{x-} = \rho_{x-}c_vT_{x-}u_{x-}dydz \tag{2.140}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}c_vT_{x+} &= \rho_{x+}c_vT_{x+}u_{x+}dydz \\
&= c_v\left(\rho_{x-}+\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(T_{x-}+\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
&= c_v\left(\rho_{x-}T_{x-}u_{x-}+\rho_{x-}T_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+\rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx+T_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\ \underbrace{+\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13)}}\right. \\
&\left.\underbrace{+T_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2+u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx^2+\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx^3}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13)}}\right)dydz
\end{aligned}
$$

$$=c_v\left(\rho_{x-}T_{x-}u_{x-}+\rho_{x-}T_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+\rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx+T_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz$$
$$=c_v\left(\rho_{x-}T_{x-}u_{x-}+\left.\frac{\partial(\rho Tu)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \tag{2.141}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-}c_vT_{y-}=\rho_{y-}c_vT_{y-}v_{y-}dzdx \tag{2.142}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned}\dot{m}_{y+}c_vT_{y+}&=\rho_{y+}c_vT_{y+}v_{y+}dzdx\\ &=c_v\left(\rho_{y-}T_{y-}v_{y-}+\left.\frac{\partial(\rho Tv)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\end{aligned} \tag{2.143}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\dot{m}_{z-}c_vT_{z-}=\rho_{z-}c_vT_{z-}w_{z-}dxdy \tag{2.144}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}\dot{m}_{z+}c_vT_{z+}&=\rho_{z+}c_vT_{z+}w_{z+}dxdy\\ &=c_v\left(\rho_{z-}T_{z-}w_{z-}+\left.\frac{\partial(\rho Tw)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy\end{aligned} \tag{2.145}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[21]（2.1.6 節 p.12）。

x 軸に沿った出入 式 (2.140)− 式 (2.141)

$$\begin{aligned}&\rho_{x-}c_vT_{x-}u_{x-}dydz-c_v\left(\rho_{x-}T_{x-}u_{x-}+\left.\frac{\partial(\rho Tu)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz\\ &=-c_v\left.\frac{\partial(\rho Tu)}{\partial x}\right|_{x-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.146}$$

y 軸に沿った出入 式 (2.142)− 式 (2.143)

$$\begin{aligned}&\rho_{y-}c_vT_{y-}v_{y-}dzdx-c_v\left(\rho_{y-}T_{y-}v_{y-}+\left.\frac{\partial(\rho Tv)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\\ &=-c_v\left.\frac{\partial(\rho Tv)}{\partial y}\right|_{y-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.147}$$

z 軸に沿った出入 式 (2.144)− 式 (2.145)

$$\begin{aligned}&\rho_{z-}c_vT_{z-}w_{z-}dxdy-c_v\left(\rho_{z-}T_{z-}w_{z-}+\left.\frac{\partial(\rho Tw)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy\\ &=-c_v\left.\frac{\partial(\rho Tw)}{\partial z}\right|_{z-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.148}$$

[21] 例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 $-$ を加え逆にする。

xyz 軸での出入の総和、式 (2.146)+ 式 (2.147)+ 式 (2.148) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による内部エネルギーの出入は次式で表される[22]。

$$
\begin{aligned}
&-c_v\left(\frac{\partial(\rho T u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho T v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho T w)}{\partial z}\right)dxdydz \\
&=-c_v\left(\rho T\frac{\partial u}{\partial x}+\rho u\frac{\partial T}{\partial x}+Tu\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho T\frac{\partial v}{\partial y}+\rho v\frac{\partial T}{\partial y}+Tv\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho T\frac{\partial w}{\partial z}+\rho w\frac{\partial T}{\partial z}+Tw\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)dxdydz \\
&=-c_v\left\{\rho T\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)+T\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydz \\
&=-c_v(\rho T\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T+T\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho)dxdydz \\
&=-c_v\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v})dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.149}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.139)p.46 と各面の質量流量の式 (2.27)-(2.32)p.16 より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)p.13 を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\dot{m}_{x-}c_vT_{x-}=\rho c_vT_{x-}u_{x-}dydz \tag{2.150}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}c_vT_{x+}&=\rho c_vT_{x+}u_{x+}dydz \\
&=\rho c_v\left(T_{x-}+\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
&=\rho c_v\left(T_{x-}u_{x-}+T_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+u_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx+\underbrace{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\right)dydz \\
&=\rho c_v\left(T_{x-}u_{x-}+T_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+u_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
&=\rho c_v\left(T_{x-}u_{x-}+\left.\frac{\partial (Tu)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned}
\tag{2.151}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-}c_vT_{y-}=\rho c_vT_{y-}v_{y-}dzdx \tag{2.152}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\dot{m}_{y+}c_vT_{y+}=\rho c_vT_{y+}v_{y+}dzdx$$

[22]式変形の詳細は式 (A.8)p.75 に示す。

$$
= \rho c_v \left(T_{y-} v_{y-} + \left. \frac{\partial (Tv)}{\partial y} \right|_{y-} dy \right) dzdx \tag{2.153}
$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$
\dot{m}_{z-} c_v T_{z-} = \rho c_v T_{z-} w_{z-} dxdy \tag{2.154}
$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{z+} c_v T_{z+} &= \rho c_v T_{z+} w_{z+} dxdy \\
&= \rho c_v \left(T_{z-} w_{z-} + \left. \frac{\partial (Tw)}{\partial z} \right|_{z-} dz \right) dxdy
\end{aligned} \tag{2.155}
$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[23]（2.1.6 節 p.12）。

x 軸に沿った出入 式 (2.150)− 式 (2.151)

$$
\begin{aligned}
&\rho c_v T_{x-} u_{x-} dydz - \rho c_v \left(T_{x-} u_{x-} + \left. \frac{\partial (Tu)}{\partial x} \right|_{x-} dx \right) dydz \\
&= -\rho c_v \left. \frac{\partial (Tu)}{\partial x} \right|_{x-} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.156}
$$

y 軸に沿った出入 式 (2.152)− 式 (2.153)

$$
\begin{aligned}
&\rho c_v T_{y-} v_{y-} dzdx - \rho c_v \left(T_{y-} v_{y-} + \left. \frac{\partial (Tv)}{\partial y} \right|_{y-} dy \right) dzdx \\
&= -\rho c_v \left. \frac{\partial (Tv)}{\partial y} \right|_{y-} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.157}
$$

z 軸に沿った出入 式 (2.154)− 式 (2.155)

$$
\begin{aligned}
&\rho c_v T_{z-} w_{z-} dxdy - \rho c_v \left(T_{z-} w_{z-} + \left. \frac{\partial (Tw)}{\partial z} \right|_{z-} dz \right) dxdy \\
&= -\rho c_v \left. \frac{\partial (Tw)}{\partial z} \right|_{z-} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.158}
$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.156)+ 式 (2.157)+ 式 (2.158) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による内部エネルギーの出入は次式で表される。

$$
-\rho c_v \left(\frac{\partial (Tu)}{\partial x} + \frac{\partial (Tv)}{\partial y} + \frac{\partial (Tw)}{\partial z} \right) dxdydz
$$

[23]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 $-$ を加え逆にする。

$$
\begin{aligned}
&= -\rho c_v \left(T\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial T}{\partial x} + T\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial T}{\partial y} + T\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial T}{\partial z} \right) dxdydz \\
&= -\rho c_v \left\{ u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} + T\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{式 (2.38) より 0}} \right\} dxdydz \\
&= -\rho c_v \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.159}
$$

2.4.3 時間あたりに伝わる熱

時間あたりに伝わる熱の量（伝熱量）として、熱伝導による伝熱と熱輻射による伝熱が考えられるが、熱伝導のみを考慮する。熱伝導による伝熱量 Q [W] はフーリエの法則より次式で表される。

$$
Q = -k\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \tag{2.160}
$$

ここで、$\boldsymbol{A}$ は面積 [m²]（式 (2.5)-(2.10)$^{p.9}$）、k は熱伝導率 [W/(Km)] である。上式より、コントロールボリュームのそれぞれの面における熱伝導による伝熱量を求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\begin{aligned}
-k\boldsymbol{A}_{x-} \cdot \boldsymbol{\nabla} T_{x-} &= -k \begin{pmatrix} dydz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{x-} \end{pmatrix} \\
&= -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} dydz
\end{aligned}
\tag{2.161}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
-k\boldsymbol{A}_{x+} \cdot \boldsymbol{\nabla} T_{x+} &= -k \begin{pmatrix} dydz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+} \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{x+} \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{x+} \end{pmatrix} \\
&= -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+} dydz \\
&= -k \left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|_{x-} \right) dydz \\
&= -k \left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \right) dydz
\end{aligned}
\tag{2.162}
$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$
\begin{aligned}
-k\boldsymbol{A}_{y-}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{y-} &= -k\begin{pmatrix}0\\ dzdx\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y-}\\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y-}\\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{y-}\end{pmatrix}\\
&= -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y-}dzdx \qquad (2.163)
\end{aligned}
$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$
\begin{aligned}
-k\boldsymbol{A}_{y+}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{y+} &= -k\begin{pmatrix}0\\ dzdx\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+}\\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+}\\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{y+}\end{pmatrix}\\
&= -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+}dzdx\\
&= -k\left(\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y-}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{y-}dy\right)dzdx \qquad (2.164)
\end{aligned}
$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$
\begin{aligned}
-k\boldsymbol{A}_{z-}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{z-} &= -k\begin{pmatrix}0\\ 0\\ dxdy\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z-}\\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{z-}\\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z-}\end{pmatrix}\\
&= -k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z-}dxdy \qquad (2.165)
\end{aligned}
$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$
\begin{aligned}
-k\boldsymbol{A}_{z+}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{z+} &= -k\begin{pmatrix}0\\ 0\\ dxdy\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+}\\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{z+}\\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+}\end{pmatrix}\\
&= -k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+}dxdy\\
&= -k\left(\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z-}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|_{z-}dz\right)dxdy \qquad (2.166)
\end{aligned}
$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[24]（2.1.6 節 p.12）。

[24]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が

x 軸に沿った出入 式 (2.161)− 式 (2.162)

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_d ydz + k\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x-} dx\right)dydz = k\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x-} dxdydz \tag{2.167}$$

y 軸に沿った出入 式 (2.163)− 式 (2.164)

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_d zdz + k\left(\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{y-} dy\right)dzdx = k\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{y-} dxdydz \tag{2.168}$$

z 軸に沿った出入 式 (2.165)− 式 (2.166)

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_d xdy + k\left(\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|_{z-} dz\right)dxdy = k\left.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|_{z-} dxdydz \tag{2.169}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.167)+ 式 (2.168)+ 式 (2.169) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での時間あたりに伝わる熱は次式で表される。

$$\begin{aligned} &k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)dxdydz \\ &= k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T dxdydz \end{aligned} \tag{2.170}$$

2.4.4 時間あたりの仕事

時間あたりの仕事（仕事率）は面に作用する力（応力と面積の積）と速度の内積で表される[25]。面に作用する力は図 2.5p.25 を参照。コントロールボリュームのそれぞれの面について考える。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\begin{pmatrix}\sigma_{x,x-}\\ \tau_{xy,x-}\\ \tau_{xz,x-}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_{x-}\\ v_{x-}\\ w_{x-}\end{pmatrix}dydz = (\sigma_{x,x-}u_{x-} + \tau_{xy,x-}v_{x-} + \tau_{xz,x-}w_{x-})dydz \tag{2.171}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{pmatrix}\sigma_{x,x+}\\ \tau_{xy,x+}\\ \tau_{xz,x+}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_{x+}\\ v_{x+}\\ w_{x+}\end{pmatrix}dydz = \begin{pmatrix}\sigma_{x,x-} + \left.\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_{x-} dx\\ \tau_{xy,x-} + \left.\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right|_{x-} dx\\ \tau_{xz,x-} + \left.\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right|_{x-} dx\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\\ v_{x-} + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} dx\\ w_{x-} + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} dx\end{pmatrix}dydz$$

減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 − を加え逆にする。

[25]仕事と仕事率は次式のように表される。

$$仕事\ [\mathrm{J}] = 力\ [\mathrm{N}] \times 距離\ [\mathrm{m}]$$

$$仕事率\ [\mathrm{W}] = 力\ [\mathrm{N}] \times 距離\ [\mathrm{m}]/時間\ [\mathrm{s}] = 力\ [\mathrm{N}] \times 速度\ [\mathrm{m/s}] = 応力\ [\mathrm{Pa}] \times 速度\ [\mathrm{m/s}] \times 面積\ [\mathrm{m}^2]$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg(\sigma_{x,x-}u_{x-} + \sigma_{x,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + u_{x-}\left.\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_{x-}dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}} \\
&+ \tau_{xy,x-}v_{x-} + \tau_{xy,x-}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}dx + v_{x-}\left.\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right|_{x-}dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}} \\
&+ \tau_{xz,x-}w_{x-} + \tau_{xz,x-}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}dx + w_{x-}\left.\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right|_{x-}dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\Bigg)dydz
\end{aligned}
\tag{2.172}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$
\begin{pmatrix} \tau_{yx,y-} \\ \sigma_{x,x-} \\ \tau_{yz,y-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{y-} \\ v_{y-} \\ w_{y-} \end{pmatrix} dzdx = (\tau_{yx,y-}u_{y-} + \sigma_{y,y-}v_{y-} + \tau_{yz,y-}w_{y-})dzdx \tag{2.173}
$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \tau_{yx,y+} \\ \sigma_{y,y+} \\ \tau_{yz,y+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{y+} \\ v_{y+} \\ w_{y+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix} \tau_{yx,y-} + \left.\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right|_{y-}dy \\ \sigma_{y,y-} + \left.\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right|_{y-}dy \\ \tau_{yz,y-} + \left.\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right|_{y-}dy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{y-} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-}dy \\ v_{y-} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy \\ w_{y-} + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}dy \end{pmatrix} dzdx \\
&= \Bigg(\tau_{yx,y-}u_{y-} + \tau_{yx,y-}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-}dy + u_{y-}\left.\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right|_{y-}dy + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-}dy^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}} \\
&+ \sigma_{y,y-}v_{y-} + \sigma_{y,y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy + v_{y-}\left.\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right|_{y-}dy + \underbrace{\left.\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}} \\
&+ \tau_{yz,y-}w_{y-} + \tau_{yz,y-}\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}dy + w_{y-}\left.\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right|_{y-}dy + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}dy^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\Bigg)dzdx
\end{aligned}
\tag{2.174}
$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$
\begin{pmatrix} \tau_{zx,z-} \\ \tau_{zy,z-} \\ \sigma_{z,z-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{z-} \\ v_{z-} \\ w_{z-} \end{pmatrix} dxdy = (\tau_{zx,z-}u_{z-} + \tau_{zy,z-}v_{z-} + \sigma_{z,z-}w_{z-})dxdy \tag{2.175}
$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$
\begin{pmatrix} \tau_{zx,z+} \\ \tau_{zy,z+} \\ \sigma_{z,z+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{z+} \\ v_{z+} \\ w_{z+} \end{pmatrix} dxdy = \begin{pmatrix} \tau_{zx,z-} + \left.\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right|_{z-}dz \\ \tau_{zy,z-} + \left.\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right|_{z-}dz \\ \sigma_{z,z-} + \left.\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right|_{z-}dz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{z-} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-}dz \\ v_{z-} + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-}dz \\ w_{z-} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-}dz \end{pmatrix} dxdy
$$

$$= \Bigg(\tau_{zx,z-} u_{z-} + \tau_{zx,z-} \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} dz + u_{z-} \left.\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right|_{z-} dz + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} dz^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}$$
$$+ \tau_{zy,z-} v_{z-} + \tau_{zy,z-} \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} dz + v_{z-} \left.\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right|_{z-} dz + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} dz^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}$$
$$+ \sigma_{z,z-} w_{z-} + \sigma_{z,z-} \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz + w_{z-} \left.\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}\right|_{z-} dz + \underbrace{\left.\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}} \Bigg) dxdy \tag{2.176}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから外への作用が負、内への作用が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[26]。

x 軸に沿った作用 $-$ 式 (2.171)+ 式 (2.172)

$$\left(\sigma_{x,x-} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} + u_{x-} \left.\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_{x-} + \tau_{xy,x-} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + v_{x-} \left.\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right|_{x-} + \tau_{xz,x-} \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} + w_{x-} \left.\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right|_{x-} \right) dxdydz \tag{2.177}$$

y 軸に沿った作用 $-$ 式 (2.173)+ 式 (2.174)

$$\left(\tau_{yx,y-} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + u_{y-} \left.\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right|_{y-} + \sigma_{y,y-} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} + v_{y-} \left.\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y}\right|_{y-} + \tau_{yz,y-} \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} + w_{y-} \left.\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right|_{y-} \right) dxdydz \tag{2.178}$$

z 軸に沿った作用 $-$ 式 (2.175)+ 式 (2.176)

$$\left(\tau_{zx,z-} \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + u_{z-} \left.\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right|_{z-} + \tau_{zy,z-} \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} + v_{z-} \left.\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right|_{z-} + \sigma_{z,z-} \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} + w_{z-} \left.\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}\right|_{z-} \right) dxdydz \tag{2.179}$$

ここで、式 (2.65)[p.26] で表される面に垂直な応力 σ_x、σ_y、σ_z [Pa] を圧力と粘性力の項に分け、次のように表す。

$$\left.\begin{array}{rcl} \sigma_x &=& -P + \mu\left(2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) = -P + \tau_{xx} \\ \sigma_y &=& -P + \mu\left(2\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) = -P + \tau_{yy} \\ \sigma_z &=& -P + \mu\left(2\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) = -P + \tau_{zz} \end{array}\right\} \tag{2.180}$$

式 (2.177)[p.54]、式 (2.178)[p.54]、式 (2.179)[p.54] の和に上式の σ を代入する。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 [p.13])、下付きを外す。コント

[26]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリューム内に作用するため内部のエネルギー量が増え、負の方向で外へ作用するためエネルギー量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で外に作用するためエネルギー量が減り、負の方向で内に作用するためエネルギー量が増えるので負号 $-$ を加え逆にする。

ロールボリューム全体での時間あたりに作用する仕事は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\big(-P+\tau_{xx}\big)\frac{\partial u}{\partial x}+\big(-P+\tau_{yy}\big)\frac{\partial v}{\partial y}+\big(-P+\tau_{zz}\big)\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\quad+u\frac{\partial}{\partial x}\big(-P+\tau_{xx}\big)+v\frac{\partial}{\partial y}\big(-P+\tau_{yy}\big)+w\frac{\partial}{\partial z}\big(-P+\tau_{zz}\big)\\
&\quad+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}\\
&\quad+u\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\Big\}dxdydz\\
&=\Big(-P\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial v}{\partial y}-P\frac{\partial w}{\partial z}-u\frac{\partial P}{\partial x}-v\frac{\partial P}{\partial y}-w\frac{\partial P}{\partial z}\\
&\quad\underbrace{+u\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}+u\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}}_{\text{加速され運動エネルギーとなる項}}\\
&\quad\underbrace{+\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{粘性により熱へと変化するエネルギーを表す散逸項であり、乱れが大きくなければ影響が小さい。散逸エネルギーについては詳細を付録 }A.3(p.77)\text{ に記す。}}\Big)dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.181}
$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

xyz 軸での出入の総和となる式 (2.181)[p.55] へ面に垂直な τ の式 (2.180)[p.54] と面に平行な τ の式 (2.66)[p.26] を代入すると、コントロールボリューム全体での時間あたりの仕事が次式で求められる。

$$
\begin{aligned}
&\Big(-P\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial v}{\partial y}-P\frac{\partial w}{\partial z}-u\frac{\partial P}{\partial x}-v\frac{\partial P}{\partial y}-w\frac{\partial P}{\partial z}\\
&\quad+u\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}+u\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\\
&\quad+\underbrace{\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{散逸項}}\Big)dxdydz\\
&=\Bigg[-P\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\\
&\quad+u\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}+v\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}+w\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}\\
&\quad+\mu u\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}+\mu v\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\\
&\quad+\mu w\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}\\
&\quad+\underbrace{\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{散逸項}}\\
&\quad\underbrace{+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{散逸項}}\Bigg]dxdydz\\
&=\Bigg(-P\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\\
&\quad+\mu\Bigg[u\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+v\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&+w\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&+\underbrace{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}_{\text{散逸項}}\\
&\underbrace{-\frac{2}{3}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}}_{\text{散逸項}}\\
&\underbrace{+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{散逸項}}\Bigg]\Bigg)dxdydz\\
=&\Bigg(-P\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\\
&+\mu\Bigg[u\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&+v\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&+w\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&+\frac{2}{3}\Bigg\{\underbrace{3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+3\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+3\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}_{\text{散逸項}}\\
&\underbrace{-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\}}_{\text{散逸項}}\\
&\underbrace{+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{散逸項}}\Bigg]\Bigg)dxdydz\\
=&\Bigg(-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\left\{-P+\frac{1}{3}\mu\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&+\mu\Bigg[u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\\
&+\frac{2}{3}\underbrace{\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-2\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}}_{\text{散逸項}}\\
&\underbrace{+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{散逸項}}\Bigg]\Bigg)dxdydz\\
=&\Bigg(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\Bigg[(u\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}u+v\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}v+w\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}w)\\
&+\underbrace{\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{散逸項、}\mathit{\Phi}\text{と置く}}\Bigg]\Bigg)dxdydz\\
=&\left(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\mathit{\Phi}\right)dxdydz \qquad (2.182)
\end{aligned}
$$

ここで Φ[W/m³] はエネルギー散逸関数であり次式で表される。

$$\Phi=\mu\left[\frac{2}{3}\left\{\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}_{\text{流体の伸縮}}\right\}+\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{流体の剪断変形（ずり変形）}}\right]$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

密度 ρ [kg/m³] が一定の非圧縮性流体の場合は面に垂直な τ の式 (2.180)p.54 は質量保存の式 (2.38)p.18 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$ から次式のようになる。

$$\left.\begin{array}{rcl}\sigma_x&=&-P+\mu\left(2\dfrac{\partial u}{\partial x}-\underbrace{\dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.38) より 0}}\right)=-P+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}=-P+\tau_{xx}\\ \sigma_y&=&-P+\mu\left(2\dfrac{\partial v}{\partial y}-\underbrace{\dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.38) より 0}}\right)=-P+2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}=-P+\tau_{yy}\\ \sigma_z&=&-P+\mu\left(2\dfrac{\partial w}{\partial z}-\underbrace{\dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.38) より 0}}\right)=-P+2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z}=-P+\tau_{zz}\end{array}\right\}\tag{2.183}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.181)p.55 へ面に垂直な τ [Pa] の上式 (2.183)p.57 と面に平行な τ [Pa] の式 (2.66)p.26 を代入すると、コントロールボリューム全体での時間あたりの仕事が次式で求められる。

$$\begin{aligned}&\Bigg(-P\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial v}{\partial y}-P\frac{\partial w}{\partial z}-u\frac{\partial P}{\partial x}-v\frac{\partial P}{\partial y}-w\frac{\partial P}{\partial z}\\&+u\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}+u\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\\&\underbrace{+\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{散逸項}}\Bigg)dxdydz\\=&\Bigg[-P\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\\&+2\mu\left(u\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\&+\mu u\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}+\mu v\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\\&+\mu w\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}\\&\underbrace{+\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\underbrace{\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.38) より 0}}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\underbrace{\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.38) より 0}}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\underbrace{\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.38) より 0}}\right)\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{散逸項}}\\&\underbrace{+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{散逸項}}\Bigg]dxdydz\\=&\Bigg(-P\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu\Bigg[u\Bigg\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}\Bigg\}\\
&+v\Bigg\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}\Bigg\}\\
&+w\Bigg\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}\Bigg\}\\
&\underbrace{+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}_{\text{散逸項、次項と合わせて}\Phi\text{と置く}}\\
&\underbrace{+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{散逸項、前項と合わせて}\Phi\text{と置く}}\Bigg]\Bigg)dxdydz\\
&=\Bigg[-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\\
&+\mu\left\{u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\right\}+\Phi\Bigg]dxdydz\\
&=\Big\{-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\mu\big(u\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}u+v\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}v+w\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\big)+\Phi\Big\}dxdydz\\
&=(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\Phi)\,dxdydz \qquad (2.184)
\end{aligned}
$$

ここで Φ[W/m³] はエネルギー散逸関数であり次式で表される。

$$
\Phi=\mu\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}
$$

2.4.5 エネルギー保存式

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

式 (2.94)[p.36] へ、式 (2.95)[p.37]、式 (2.107)[p.40]、式 (2.128)[p.44]、式 (2.149)[p.48]、式 (2.170)[p.52]、式 (2.182)[p.56] を入れると次式が導かれる（エネルギー散逸関数 Φ は十分に小さいと考え無視する）。

$$
\begin{aligned}
&\left\{\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+gy+c_vT\right)\right\}dxdydz\\
&\quad=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v})dxdydz-g\{y\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})+\rho v\}dxdydz-c_v\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v})dxdydz+k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}Tdxdydz\\
&\qquad+\left\{-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\right\}dxdydz
\end{aligned}
$$

dxdydz で両辺を割り括弧を外すと次式となる。

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+gy+c_vT\right)\\
&\quad=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot((\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v})-gy\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})-\rho gv-c_v\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v})+k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T
\end{aligned}
$$

$$-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} \tag{2.185}$$

ここで質量保存式の式 (2.37)$^{\text{p.18}}$ より、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

これを上式 (2.185)$^{\text{p.59}}$ の左辺に代入し整理すると次式となる。

$$\begin{aligned}
\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)&\underbrace{-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+gy+c_vT\right)}_{\text{右辺の項と釣合い消える}}\\
&=-\frac{1}{2}\left\{\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+\underbrace{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\Big\}-gy\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})-c_v\{T\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})}_{\text{左辺の項と釣合い消える}}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T\}\\
&\quad-\rho gv+k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)&=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T-\rho gv+k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T\\
&\quad-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{2.186}$$

上式から運動量の保存式 (2.90)$^{\text{p.34}}$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] の内積を引く。式 (2.90)$^{\text{p.34}}$ と $\boldsymbol{v}$ [m/s] の内積は以下のようになる（両辺に ρ [kg/m^3] を掛けている）。

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\rho\boldsymbol{v}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}$$

上式を式 (A.9)$^{\text{p.76}}$ の変形と $\boldsymbol{g}=(0,0,g)$[m/s^2] の計算をすると次式となる。

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})-\rho gv$$

式 (2.186)$^{\text{p.59}}$ から上式を引くと次式のエネルギー保存式を得る。

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=-\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T+k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T-P\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.187}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

式 (2.94)$^{\text{p.36}}$ へ、式 (2.96)$^{\text{p.37}}$、式 (2.117)$^{\text{p.42}}$、式 (2.138)$^{\text{p.46}}$、式 (2.159)$^{\text{p.50}}$、式 (2.170)$^{\text{p.52}}$、式 (2.184)$^{\text{p.58}}$ を入れると次式が導かれる（エネルギー散逸関数 Φ は十分に小さいと考え無視する）。

$$\begin{aligned}
\rho\left(\boldsymbol{v}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)dxdydz&=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})dxdydz+\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}dxdydz-\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}Tdxdydz\\
&\quad+k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}Tdxdydz+\{-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\}\,dxdydz
\end{aligned}$$

両辺を $dxdydz$ で割って次式を得る。

$$\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}-\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T$$
$$+k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} \tag{2.188}$$

上式から運動量の保存式 (2.91)p.35 と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] の内積を引く。式 (2.91)p.35 と $\boldsymbol{v}$ [m/s] の内積は以下のようになる。変形の詳細は A.2.1 節 p.75 に示す。

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\rho\boldsymbol{v}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}$$
$$=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}$$

式 (2.188)p.60 から上式を引くと次式となる。

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=-\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T+k\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T \tag{2.189}$$

上式を ρ [kg/m³] と c_v [J/(kg ·K)] で割り、熱拡散率（温度伝導率）a [m²/s]$=\dfrac{k}{\rho c_v}$ に置き換え次式のようにも表される。

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T+a\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T \tag{2.190}$$

2.5 成分の質量保存

コントロールボリューム中に多成分あるときそれぞれの成分の質量保存を考える。出入としては、対流と拡散によるものが考えられる。成分の質量保存は以下の成分 i の質量分率 ω_i [-] を用いて表される。

$$\omega_i=\frac{\rho_i}{\rho}$$

ここで ρ_i [kg/m³] は成分 i の密度、ρ [kg/m³] は全体の密度である。

2.5.1 持っている成分の質量の時間変化

コントロールボリュームの体積は $dxdydz$ [m³]、質量 m [kg]$=\rho dxdydz$ で表されるので、成分 i の質量 m_i [kg] の時間変化は次のように表すことが出来る。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = \frac{\partial(\omega_i m)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\omega_i)}{\partial t}dxdydz = \left(\rho\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \omega_i\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dxdydz \tag{2.191}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = \frac{\partial(\omega_i m)}{\partial t} = \rho\frac{\partial\omega_i}{\partial t}dxdydz \tag{2.192}$$

2.5.2 対流による成分の質量の出入

質量当たりの成分 i の質量は $\frac{\rho_i}{\rho} = \omega_i$ [kg/kg] であるので、対流による出入は質量流量×質量当たりの成分 i の質量で次式で表される（2.1.4[10] 節）。

$$\dot{m}_i = \frac{\rho_i}{\rho}\dot{m} = \omega_i\dot{m} \tag{2.193}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.193)[61] と各面の質量流量の式 (2.17)-(2.22)[p.15] より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)[p.13] を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\omega_{i,x-}\dot{m}_{x-} = \rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-}dydz \tag{2.194}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned}
\omega_{i,x+}\dot{m}_{x+} &= \rho_{x+}\omega_{i,x+}u_{x+}dydz \\
&= \left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\omega_{i,x-} + \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
&= \Bigg(\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-} + \rho_{x-}\omega_{i,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + \rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx + \omega_{i,x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx \\
&\quad \underbrace{+\rho_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2 + \omega_{i,x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2 + u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}} \\
&\quad \underbrace{+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^3}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\Bigg)dydz \\
&= \left(\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-} + \rho_{x-}\omega_{i,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + \rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx + \omega_{i,x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned}$$

$$=\left(\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \tag{2.195}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\omega_{i,y-}\dot{m}_{y-}=\rho_{y-}\omega_{i,y-}v_{y-}dzdx \tag{2.196}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned}\omega_{i,y+}\dot{m}_{y+}&=\rho_{y+}\omega_{i,y+}v_{y+}dzdx\\&=\left(\rho_{y-}\omega_{i,y-}v_{y-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\end{aligned} \tag{2.197}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\omega_{i,z-}\dot{m}_{z-}=\rho_{z-}\omega_{i,z-}w_{z-}dxdy \tag{2.198}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}\omega_{i,z+}\dot{m}_{z+}&=\rho_{z+}\omega_{i,z+}w_{z+}dxdy\\&=\left(\rho_{z-}\omega_{i,z-}w_{z-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy\end{aligned} \tag{2.199}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[27]（2.1.6 節 p.12）。

x 軸に沿った出入 式 (2.194)− 式 (2.195)

$$\begin{aligned}&\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-}dydz-\left(\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz\\&=-\left.\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.200}$$

y 軸に沿った出入 式 (2.196)− 式 (2.197)

$$\begin{aligned}&\rho_{y-}\omega_{i,y-}v_{y-}dzdx-\left(\rho_{y-}\omega_{i,y-}v_{y-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\\&=-\left.\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.201}$$

z 軸に沿った出入 式 (2.198)− 式 (2.199)

$$\begin{aligned}&\rho_{z-}\omega_{i,z-}w_{z-}dxdy-\left(\rho_{z-}\omega_{i,z-}w_{z-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy\\&=-\left.\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.202}$$

[27] 例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 $-$ を加え逆にする。

xyz 軸での出入の総和、式 (2.200)+ 式 (2.201)+ 式 (2.202) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による成分の質量の出入は次式で表される[28]。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}dxdydz-\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}dxdydz-\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}dxdydz\\
&=-\left(\rho\omega_i\frac{\partial u}{\partial x}+\rho u\frac{\partial\omega_i}{\partial x}+\omega_i u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\omega_i\frac{\partial v}{\partial y}+\rho v\frac{\partial\omega_i}{\partial y}+\omega_i v\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\omega_i\frac{\partial w}{\partial z}+\rho w\frac{\partial\omega_i}{\partial z}+\omega_i w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)dxdydz\\
&=-\left\{\rho\left(u\frac{\partial\omega_i}{\partial x}+v\frac{\partial\omega_i}{\partial y}+w\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right)+\rho\omega_i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\omega_i\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydz\\
&=-\big(\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i+\rho\omega_i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\omega_i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\big)dxdydz\\
&=-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\omega_i\boldsymbol{v})dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.203}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

対流により各面で時間当たりに出入する量は式 (2.193)[61] と各面の質量流量の式 (2.27)-(2.32)[p.16] より次のように求まる。途中で相対する面の関係を式 (2.11)[p.13] を用いて求める。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\omega_{i,x-}\dot{m}_{x-}=\rho\omega_{i,x-}u_{x-}dydz \tag{2.204}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\omega_{i,x+}\dot{m}_{x+}&=\rho\omega_{i,x+}u_{x+}dydz\\
&=\rho\left(\omega_{i,x-}+\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz\\
&=\rho\left(\omega_{i,x-}u_{x-}+\omega_{i,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+u_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx+\underbrace{\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\right)dydz\\
&=\rho\left(\omega_{i,x-}u_{x-}+\omega_{i,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+u_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz\\
&=\rho\left(\omega_{i,x-}u_{x-}+\left.\frac{\partial(\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned}
\tag{2.205}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\omega_{i,y-}\dot{m}_{y-}=\rho\omega_{i,y-}v_{y-}dzdx \tag{2.206}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\omega_{i,y+}\dot{m}_{y+}=\rho\omega_{i,y+}v_{y+}dzdx$$

[28]式変形の詳細は式 (A.10)[p.76] に示す。

$$= \rho\left(\omega_{i,y-}v_{y-} + \left.\frac{\partial(\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \tag{2.207}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\omega_{i,z-}\dot{m}_{z-} = \rho\omega_{i,z-}w_{z-}dxdy \tag{2.208}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}\omega_{i,z+}\dot{m}_{z+} &= \rho\omega_{i,z+}w_{z+}dxdy \\ &= \rho\left(\omega_{i,z-}w_{z-} + \left.\frac{\partial(\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \end{aligned}\tag{2.209}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[29]（2.1.6 節 p.12）。

x 軸に沿った出入 式 (2.204)− 式 (2.205)

$$\begin{aligned}&\rho\omega_{i,x-}u_{x-}dydz - \rho\left(\omega_{i,x-}u_{x-} + \left.\frac{\partial(\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\ &= -\rho\left.\frac{\partial(\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.210}$$

y 軸に沿った出入 式 (2.206)− 式 (2.207)

$$\begin{aligned}&\rho\omega_{i,y-}v_{y-}dzdx - \rho\left(\omega_{i,y-}v_{y-} + \left.\frac{\partial(\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\ &= -\rho\left.\frac{\partial(\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.211}$$

z 軸に沿った出入 式 (2.208)− 式 (2.209)

$$\begin{aligned}&\rho\omega_{i,z-}w_{z-}dxdy - \rho\left(\omega_{i,z-}w_{z-} + \left.\frac{\partial(\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\ &= -\rho\left.\frac{\partial(\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.212}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.210)+ 式 (2.211)+ 式 (2.212) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での対流による成分の質量の出入は次式で表される。

$$-\rho\frac{\partial(\omega_i u)}{\partial x}dxdydz - \rho\frac{\partial(\omega_i v)}{\partial y}dxdydz - \rho\frac{\partial(\omega_i w)}{\partial z}dxdydz$$

[29] 例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 − を加え逆にする。

$$
\begin{aligned}
&= -\rho\left(\omega_i \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \omega_i \frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \omega_i}{\partial y} + \omega_i \frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -\rho\left\{u\frac{\partial \omega_i}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_i}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_i}{\partial z} + \omega_i \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.38) より 0}}\right\}dxdydz \\
&= -\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\omega_i dxdydz \qquad (2.213)
\end{aligned}
$$

2.5.3 拡散による成分の質量の出入

拡散による成分の質量の出入はフィックの法則より、拡散係数を $D_i[\mathrm{m^2/s}]$、面積ベクトルを $\boldsymbol{A}[\mathrm{m^2}]$ とすると

$$
-\rho D_i \boldsymbol{\nabla}\omega_i \cdot \boldsymbol{A}
$$

と表される。上式より、コントロールボリュームのそれぞれの面における拡散による成分 i の質量の出入を求める。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

x **軸に垂直** yz **面左**

$$
-\rho_{x-} D_i \boldsymbol{\nabla}\omega_{i,x-} \cdot \boldsymbol{A}_{x-} = -\rho_{x-} D_i \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{x-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dydz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho_{x-} D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dydz \qquad (2.214)
$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$
\begin{aligned}
-\rho_{x+} D_i \boldsymbol{\nabla}\omega_{i,x+} \cdot \boldsymbol{A}_{x+} &= -\rho_{x+} D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x+} dydz \\
&= -D_i\left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial \frac{\partial \omega_i}{\partial x}}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= -D_i\left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= -D_i\left(\rho_{x-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} + \rho_{x-} \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} dx + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dx \underbrace{+ \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} dx^2}_{\text{高位の無限小であるため無視する（2.1.7 節 p.13）}}\right)dydz \\
&= -D_i\left(\rho_{x-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} + \rho_{x-} \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} dx + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \qquad (2.215)
\end{aligned}
$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$
-\rho_{y-} D_i \boldsymbol{\nabla}\omega_{i,y-} \cdot \boldsymbol{A}_{y-} = -\rho_{y-} D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} dzdx \qquad (2.216)
$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\begin{aligned}
-\rho_{y+} D_i \boldsymbol{\nabla} \omega_{i,y+} \cdot \boldsymbol{A}_{y+} &= -\rho_{y+} D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y+} dzdx \\
&= -D_i \left(\rho_{y-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} + \rho_{y-} \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-} dy + \left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} dy \right) dzdx
\end{aligned} \tag{2.217}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$-\rho_{z-} D_i \boldsymbol{\nabla} \omega_{i,z-} \cdot \boldsymbol{A}_{z-} = -\rho_{z-} D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} dxdy \tag{2.218}$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{aligned}
-\rho_{z+} D_i \boldsymbol{\nabla} \omega_{i,z+} \cdot \boldsymbol{A}_{z+} &= -\rho_{z+} D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z+} dxdy \\
&= -D_i \left(\rho_{z-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} + \rho_{z-} \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-} dz + \left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} dz \right) dxdy
\end{aligned} \tag{2.219}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[30]（2.1.6 節 p.12）。

x **軸に沿った出入** 式 (2.214)− 式 (2.215)

$$\begin{aligned}
&-\rho D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dydz + D_i \left(\rho_{x-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} + \rho_{x-} \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} dx + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dx \right) dydz \\
&= D_i \left(\rho \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} \right) dxdydz
\end{aligned} \tag{2.220}$$

y **軸に沿った出入** 式 (2.216)− 式 (2.217)

$$\begin{aligned}
&-\rho D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} dzdx + D_i \left(\rho_{y-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} + \rho_{y-} \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-} dy + \left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} dy \right) dzdx \\
&= D_i \left(\rho \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} \right) dxdydz
\end{aligned} \tag{2.221}$$

z **軸に沿った出入** 式 (2.218)− 式 (2.219)

$$\begin{aligned}
&-\rho D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} dxdy + D_i \left(\rho_{z-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} + \rho_{z-} \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-} dz + \left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} dz \right) dxdy \\
&= D_i \left(\rho \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} \right) dxdydz
\end{aligned} \tag{2.222}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.220)+ 式 (2.221)+ 式 (2.222) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での拡散による成分の質量の出入は次式で表される[31]。

[30]例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 − を加え逆にする。

[31]式変形の詳細は式 (A.11)p.77 に示す。

$$
\begin{aligned}
&D_i\left(\rho\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right)dxdydz+D_i\left(\rho\frac{\partial^2\omega_i}{\partial y^2}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right)dxdydz+D_i\left(\rho\frac{\partial^2\omega_i}{\partial z^2}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right)dxdydz\\
&\quad=D_i\left\{\rho\left(\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_i}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega_i}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega_i}{\partial y}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right\}dxdydz\\
&\quad=D_i\left(\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i+\boldsymbol{\nabla}\rho\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i\right)dxdydz\\
&\quad=D_i\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho\boldsymbol{\nabla}\omega_i\right)dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.223}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

x 軸に垂直 yz 面左

$$
-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,x-}\cdot\boldsymbol{A}_{x-}=-\rho D_i\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\\ \left.\dfrac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{x-}\\ \left.\dfrac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{x-}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dydz\\0\\0\end{pmatrix}=-\rho D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dydz
\tag{2.224}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,x+}\cdot\boldsymbol{A}_{x+}&=-\rho D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x+}dydz\\
&=-\rho D_i\left(\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial\frac{\partial\omega_i}{\partial x}}{\partial x}\right|_{d}x\right)dydz\\
&=-\rho D_i\left(\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned}
\tag{2.225}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$
-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,y-}\cdot\boldsymbol{A}_{y-}=-\rho D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-}dzdx
\tag{2.226}
$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$
\begin{aligned}
-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,y+}\cdot\boldsymbol{A}_{y+}&=-\rho D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y+}dzdx\\
&=-\rho D_i\left(\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-}+\left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-}dy\right)dzdx
\end{aligned}
\tag{2.227}
$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$
-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,z-}\cdot\boldsymbol{A}_{z-}=-\rho D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z-}dxdy
\tag{2.228}
$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$
-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,z+}\cdot\boldsymbol{A}_{z+}=-\rho D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z+}dxdy
$$

$$= -\rho D_i \left(\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-} dz \right) dxdy \tag{2.229}$$

上六式から、まずそれぞれの軸に沿った出入を求める。xyz の各軸にそってコントロールボリュームから出て行く方向が負、入る方向が正になるように符号を加え、向かい合う面を足し合わせる[32]（2.1.6 節 p.12）。

x 軸に沿った出入 式 (2.224)− 式 (2.225)

$$-\rho D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dydz + \rho D_i \left(\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \right) dydz = \rho D_i \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} dxdydz \tag{2.230}$$

y 軸に沿った出入 式 (2.226)− 式 (2.227)

$$-\rho D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} dzdx + \rho D_i \left(\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-} dy \right) dzdx = \rho D_i \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-} dxdydz \tag{2.231}$$

z 軸に沿った出入 式 (2.228)− 式 (2.229)

$$-\rho D_i \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} dxdy + \rho D_i \left(\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-} dz \right) dxdy = \rho D_i \left.\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-} dxdydz \tag{2.232}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.230)+ 式 (2.231)+ 式 (2.232) をとる。ここで、全ての項がコントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られているため各境界面での区別はせず (2.1.7 節 p.13)、下付きを外す。コントロールボリューム全体での拡散による成分の質量の出入は次式で表される。

$$\begin{aligned}
&\rho D_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2} dxdydz + \rho D_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} dxdydz + \rho D_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2} dxdydz \\
&= \rho D_i \left(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2} \right) dxdydz \\
&= \rho D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i dxdydz
\end{aligned} \tag{2.233}$$

2.5.4 成分の質量保存式

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

成分 i の質量の保存式は、式 (2.191)p.61、式 (2.203)p.63、式 (2.223)p.67 より

$$\left(\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dxdydz = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \omega_i \boldsymbol{v}) dxdydz + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i \big) dxdydz$$

両辺を $dxdydz$ で割って、

$$\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \omega_i \boldsymbol{v}) + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i \big) \tag{2.234}$$

[32] 例えば x 軸に垂直な左の面では x 軸の正の方向でコントロールボリュームに入るため内部の量が増え、負の方向で出て行くため量が減るのでそのままでよい。しかし、右の面では正の方向で出て行くため量が減り、負の方向で入るため量が増えるので負号 $-$ を加え逆にする。

ここで質量保存式の式 (2.37)p.18 より、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v})$$

これを次式のように、上式 (2.234)p.68 の左辺に代入し、右辺を一部展開する。

$$\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \underbrace{-\omega_i \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v})}_{\text{右辺の項と釣合い消える}} = \underbrace{-\omega_i \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v})}_{\text{左辺の項と釣合い消える}} - \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i\big)$$

$$\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i\big) \tag{2.235}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

成分 i の質量の保存式は、式 (2.192)p.61、式 (2.213)p.65、式 (2.233)p.68 より

$$\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} dxdydz = -\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i dxdydz + \rho D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i dxdydz$$

両辺を $\rho dxdydz$ で割って、

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i \tag{2.236}$$

2.6 一般形

それぞれの支配方程式を再度示す。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

質量保存式 式 (2.37)p.18

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v})$$

運動量保存式 式 (2.90)p.34

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} u \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} v \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} P + \frac{1}{3} \nu \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) + \nu \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} u - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu \left\{ \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial}{\partial x} \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\big) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} u \right\} \\ -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} v - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu \left\{ \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial}{\partial y} \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\big) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} v \right\} - g \\ -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} w - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu \left\{ \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial}{\partial z} \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\big) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} w \right\} \end{pmatrix}$$

エネルギー保存式 式 (2.187)[p.59]

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_v \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T + k \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} T - P \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$$

成分の質量保存式 式 (2.235)[p.69]

$$\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i\right)$$

上式において物性値などの一定値（ν [m²/s]、g [m/s²]、c_p [J/(kg·K)]、k [W/(K·m)]、D_i [m²/s]）を除くと未知数は ρ [kg/m³]、u [m/s]、v [m/s]、w [m/s]、P [Pa]、T [K]、ω_i [kg/kg] の 7 つである。式の数が 6 つであるので、これを解くにはもう 1 つ ρ [kg/m³] と T [K]、P [Pa] の関係式（状態方程式）が必要となる。

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

質量保存式 式 (2.38)[p.18]

$$0 = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$0 = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$$

運動量保存式 式 (2.92)[p.35]

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} u - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} u \\ -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} v - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} v - g \\ -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} w - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} w \end{pmatrix}$$

エネルギー保存式 式 (2.190)[p.60]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T + a \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} T$$

成分の質量保存式 式 (2.236)[p.69]

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i$$

上式において物性値などの一定値（ρ [kg/m³]、ν [m²/s]、g [m/s²]、c_p [J/(kg·K)]、k [W/(K·m)]、D_i [m²/s]）を除くと未知数は u [m/s]、v [m/s]、w [m/s]、P [Pa]、T [K]、ω_i [kg/kg] の 6 つである。式の数が 6 つであるので、式を解くことで未知数を求めることができる。

すべての保存式において

$$\text{非定常項} = \text{対流項} + \text{拡散項} + \cdots$$

の形となっている。時間 t [s] で微分されている非定常項、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] との内積をとっている対流項、拡散係数（単位はすべて m^2/s）と $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ の項で表される拡散項と残りの項である。それぞれ質量（と比熱）あたりの物理量に対応している。運動量保存式では運動量 $m\boldsymbol{v}$ が質量あたりであるので $\boldsymbol{v}$ となる。エネルギー保存では非圧縮では内部エネルギー $c_p mT$ のみとなり比熱 c_p と質量あたりは T となる。成分の質量 $m\omega_i$ の質量あたりは ω_i となる。また、質量保存では、質量 m の質量あたりであるので 1 であり、二階微分の項はゼロとなり消える。

付 録 A　付録

A.1 数学的な説明補足

A.1.1 微分の定義

関数 $y = f(x)$ について、導関数（y を x での微分）は以下のように定義される。

$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$

A.1.2 微分の計算

関数 $y = f(x)$ と関数 $z = g(x)$ の積を x で微分すると、微分の定義より以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d(yz)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{x+\Delta x - x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) - f(x)\}g(x+\Delta x) + f(x)\{g(x+\Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) - f(x)\}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{g(x+\Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \frac{dy}{dx} z + y \frac{dz}{dx}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

左辺が y^2 の場合は、上式において $z = y$ とすれば以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d(y^2)}{dx} &= \frac{dy}{dx} y + y \frac{dy}{dx} \\
&= 2y \frac{dy}{dx}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

上式で y ではなく、ベクトル $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ であると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})}{dt} &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) \\
&= \frac{d}{dt}(u^2 + v^2 + w^2) \\
&= \frac{d(u^2)}{dt} + \frac{d(v^2)}{dt} + \frac{d(w^2)}{dt} \\
&= 2u\frac{du}{dt} + 2v\frac{dv}{dt} + 2w\frac{dw}{dt} \\
&= 2\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right) \\
&= 2\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

関数 $a = f(x)$ と関数 $b = g(x)$ と関数 $c = h(x)$ の積の微分を式 (A.1) から求める。

$$\frac{d(abc)}{dx} = \frac{d(ab)(c)}{dx} = \frac{d(ab)}{x}c + ab\frac{dc}{dx} = \left(\frac{da}{dx}b + a\frac{db}{dx}\right)c + ab\frac{dc}{dx} = bc\frac{da}{dx} + ac\frac{db}{dx} + ab\frac{dc}{dx} \tag{A.4}$$

A.1.3　∇ の計算

$\boldsymbol{\nabla}$（ナブラ）はベクトルで次式で表される。

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

スカラーとの積、例えば温度 T との積は次式のようになる。

$$\boldsymbol{\nabla} T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ベクトルとの積（内積)、例えば速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ との積は次のようになる。ベクトルの内積なので、積はスカラー量となる。先に速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を示す。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

次にスカラーとベクトルの積との内積、例えばスカラーの密度 ρ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ では次のようになる。ベクトルとの内積なので、積はスカラー量となる。

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \\
&= \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&= \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho
\end{aligned}
$$

次にスカラー 2 つとベクトルの積との内積、例えばスカラーの密度 ρ とスカラーの温度 T と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ では次のようになる。ベクトルとの内積なので、積はスカラー量となる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v}) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho T u \\ \rho T v \\ \rho T w \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial(\rho T u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho T v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho T w)}{\partial z} \\
&= \rho T\frac{\partial u}{\partial x} + \rho u\frac{\partial T}{\partial x} + Tu\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho T\frac{\partial v}{\partial y} + \rho v\frac{\partial T}{\partial y} + Tv\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho T\frac{\partial w}{\partial z} + \rho w\frac{\partial T}{\partial z} + Tw\frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&= \rho T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) + T\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \\
&= \rho T\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T + T\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho
\end{aligned}
$$

A.1.4 テーラー展開

$x = a$ で無限回微分可能なとき

$$
\begin{aligned}
f(x) \quad = \quad & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \\
& + \frac{f''''(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

式 (A.5) において、x を $x + \Delta x$、a を x とすると、

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta x) \quad = \quad & f(x) + f'(x)(\Delta x) + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(\Delta x)^3 \\
& + \frac{f''''(x)}{4!}(\Delta x)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + \cdots \\
= \quad & f(x) + \frac{\partial}{\partial x}f(x)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)(\Delta x)^3 \\
& + \frac{1}{24}\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x)(\Delta x)^4 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x)(\Delta x)^n + \cdots
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

式 (A.5) において、x を $x + dx$、a を x とすると、

$$
f(x+dx) \quad = \quad f(x) + f'(x)(dx) + \frac{f''(x)}{2!}(dx)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(dx)^3
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{f''''(x)}{4!}(dx)^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(dx)^n+\cdots \\
= \quad & f(x)+\frac{\partial}{\partial x}f(x)dx+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)(dx)^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)(dx)^3 \\
& +\frac{1}{24}\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x)(dx)^4+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x)(dx)^n+\cdots
\end{aligned}
$$

dx の 2 乗以上の項は高次の無限小の項となるので無視すると次式となる。

$$
f(x+dx)=f(x)+\frac{\partial}{\partial x}f(x)dx \tag{A.7}
$$

A.2 途中式

A.2.1 エネルギー保存式での計算の途中式

計算 1

$$
\begin{aligned}
&\rho T\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T+T\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho \\
&\quad=\rho T\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)+T\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \\
&\quad=\rho T\frac{\partial u}{\partial x}+\rho u\frac{\partial T}{\partial x}+Tu\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho T\frac{\partial v}{\partial y}+\rho v\frac{\partial T}{\partial y}+Tv\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho T\frac{\partial w}{\partial z}+\rho w\frac{\partial T}{\partial z}+Tw\frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&\quad=\frac{\partial(\rho Tu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho Tv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho Tw)}{\partial z} \\
&\quad=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\rho Tu\\ \rho Tv\\ \rho Tw\end{pmatrix} \\
&\quad=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v})
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

計算 2

$$
\begin{aligned}
&\rho\boldsymbol{v}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix} \\
&=\rho\{u(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u)+v(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v)+w(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w)\} \\
&=\rho\left\{u\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)+v\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)+w\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\
&=\frac{1}{2}\rho\left\{2\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}+uv\frac{\partial v}{\partial x}+uw\frac{\partial w}{\partial x}+uv\frac{\partial u}{\partial y}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+vw\frac{\partial w}{\partial y}+uw\frac{\partial u}{\partial z}+vw\frac{\partial v}{\partial z}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\
&=\frac{1}{2}\rho\left\{u\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}+2w\frac{\partial w}{\partial x}\right)+v\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}+2w\frac{\partial w}{\partial y}\right)+w\left(2u\frac{\partial u}{\partial z}+2v\frac{\partial v}{\partial z}+2w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}\rho\left\{u\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{\partial w^2}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial u^2}{\partial y}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial w^2}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial u^2}{\partial z}+\frac{\partial v^2}{\partial z}+\frac{\partial w^2}{\partial z}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\rho\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2) \\ \frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2+w^2) \\ \frac{\partial}{\partial z}(u^2+v^2+w^2) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{A.9}$$

A.2.2 成分の質量保存式での計算の途中式

計算 1

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i+\rho\omega_i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\omega_i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho$$

$$=\rho\left(u\frac{\partial\omega_i}{\partial x}+v\frac{\partial\omega_i}{\partial y}+w\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right)+\rho\omega_i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\omega_i\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)$$

$$=\rho\omega_i\frac{\partial u}{\partial x}+\rho u\frac{\partial\omega_i}{\partial x}+\omega_i u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\omega_i\frac{\partial v}{\partial y}+\rho v\frac{\partial\omega_i}{\partial y}+\omega_i v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\omega_i\frac{\partial w}{\partial z}+\rho w\frac{\partial\omega_i}{\partial z}+\omega_i w\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \rho\omega_i u \\ \rho\omega_i v \\ \rho\omega_i w \end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\omega_i\boldsymbol{v}) \tag{A.10}$$

計算 2

$$\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i+\boldsymbol{\nabla}\rho\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i$$

$$=\rho\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial\omega_i}{\partial x} \\ \frac{\partial\omega_i}{\partial y} \\ \frac{\partial\omega_i}{\partial z} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} \\ \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ \frac{\partial\rho}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial\omega_i}{\partial x} \\ \frac{\partial\omega_i}{\partial y} \\ \frac{\partial\omega_i}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega_i}{\partial x}+\rho\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\omega_i}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega_i}{\partial y}+\rho\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\omega_i}{\partial y}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\omega_i}{\partial z}+\rho\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\omega_i}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \rho\frac{\partial\omega_i}{\partial x} \\ \rho\frac{\partial\omega_i}{\partial y} \\ \rho\frac{\partial\omega_i}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i\big) \tag{A.11}$$

A.3　散逸エネルギー

2.4.4 節 p.52 のように、コントロールボリュームでの時間あたりの仕事は面に作用する力と流速の内積で表される。相対する面での差をとると次式となる。

$$\frac{\partial(\tau u)}{\partial y} = \tau\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

上式の一項目 $\tau\dfrac{\partial u}{\partial y}$ は、応力と速度の変化量である。速度の変化量は垂直方向の変化なので、変形を表している。流体を変形させる仕事であるため、内部エネルギーに変換される。二項目 $u\dfrac{\partial \tau}{\partial y}$ は、応力の変化量と速度である。応力の変化で方向は変わらないため、流体を加速させる仕事となる。このように一項目は流体を変形させ粘性により熱となり内部エネルギーに変換される。これを散逸と呼ぶ。二項目は加速させる仕事で、運動エネルギーになる。散逸についての詳細は日野の教科書 [2] を参照すること。

コントロールボリューム全体にされる仕事は、面に垂直な応力 τ_{xx}、τ_{yy}、τ_{zz} の入った項は流体の伸縮となる。流体が伸縮することで変形し内部エネルギーへと変換される。面に平行な応力 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} の入った項は流体の剪断変形となる。流体が剪断変形することで内部エネルギーへと変換される。流体の伸縮や剪断変形については杉山らの教科書 [3] に分かりやすくまとめられている。

参考文献

[1] 生井武史, 井上雅弘. 粘性流体の力学, 第 1 章. 理工学社, 1978.

[2] 日野幹雄. 流体力学, 第 9 章. 朝倉書店, 1992.

[3] 杉山弘, 遠藤剛, 新井隆景. 流体力学, 第 2 章. 森北出版, 1995.