私でも分かる! **数値計算**

椿 耕太郎

2011 年 12 月 2 日

はじめに

数値計算の専門書は多いが、初学者に分かりやすいように基本の式からまとめているものが見つからなかったため、基本の式からまとめていくつもりである。まだ作成途中であり間違いがある可能性もあるため、詳細を知りたい場合は数値計算の専門書や末尾の参考文献を参考にしてほしい。なるべく分かりやすい内容となるように、数値計算の勉強会での内容を参考に作成している。勉強会の参加者の学生の諸君と、内容について助言を下さった皆様に感謝します。数値計算勉強会の参加者:2010 年度 長友理恵さん、2011 年度 江島大和くん、行徳俊希くん。助言を頂いた方：松尾叔美さん。

目 次

第1章　概要

温度分布や速度分布を求めることにより、伝熱量や摩擦力を知ることができる。現象を記述する式 (支配方程式) が分かっていて知りたい条件での境界条件、初期条件で解くことが出来れば、温度分布や速度分布の厳密解を求められる。

支配方程式が微分方程式である場合、解く際の積分定数を求めるために、それぞれの変数の微分の階数を足し合わせた数だけ条件が必要である。時間微分の場合は初期条件、位置での微分であれば境界条件と呼ばれる。一つの例として、１次元の熱伝導の定常の現象の厳密解を求めよう。この時、支配方程式は以下の１次元の熱伝導方程式となる。

$$0 = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

$x = 0$、$x = 7$ を境界とし、境界条件を以下の２条件とする。

$$x = 0 \text{ で } T = 10\ ℃ \tag{1.2}$$

$$x = 7 \text{ で } T = 30\ ℃ \tag{1.3}$$

式 (1.1) を x で積分して、

$$0 = \int_x \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$
$$0 = \alpha \frac{\partial T}{\partial x} + C_1$$

さらに x で積分すると、

$$0 = \int_x \alpha \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_x C_1 dx$$
$$0 = \alpha T + C_1 x + C_2$$

境界条件より、$C_2 = -10\alpha$ と $C_1 = -\frac{20}{7}\alpha$ となる。よって、温度は次の関数となる。

$$T = \frac{20}{7}x + 10$$

上式を x で微分するとフーリエの法則より熱流束 q は次のように求められる。

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{20}{7}k$$

このように厳密解を求めることができるが、多くの場合、支配方程式と条件から厳密解を求めることは難しい。そこで数値計算では、計算対象を細かな領域に分割して (離散化)、温度分布や速度分布の連続的な値を求めれるのではなく、分割した不連続な点 (離散点) における値を求める。

離散化により、対象を分けた不連続な点ごとの未知数の数と同じ数の方程式を立て、連立させ解くことにより、それぞれの点での値を求める。離散化では、支配方程式と境界条件 (非定常の現象では初期条件) を離散化する。また、位置での離散化に加え非定常では時間で離散化する。

計算の流れは以下の通りである。

1. 求めたい現象の支配方程式と境界条件、初期条件を求める
2. 離散化する（支配方程式・境界条件・初期条件を領域と時間で離散化）
3. 離散化した式（連立方程式）を解く

ここでは支配方程式（保存式）として以下を考えていく。

質量保存式

運動量保存式　速度の計算

エネルギー保存式　温度の計算

化学種保存式　濃度（質量分率・モル分率）の計算

第2章　私でも分かる！支配方程式

2.1　保存量

2.1.1　支配方程式

支配方程式では、知りたい量に関する保存式を立てる。支配方程式はそれぞれ、保存を考える境界領域（コントロールボリューム）について考える。このコントロールボリューム内での、それぞれの保存を考える物理量に対し、支配方程式は以下の形になる。

$$
\begin{aligned}
&\text{コントロールボリューム内に持っている物理量の時間変化} = \\
&\qquad \text{時間あたりに境界面でコントロールボリュームに出入する物理量} \\
&\qquad + \text{時間あたりにコントロールボリューム内で生成される物理量}
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

以下の保存対象について、それぞれ保存式をたてる。

- 質量 [kg]
- 運動量 [kg m/s] [N s]
- エネルギー [J]
- 化学種 （混合物のそれぞれの濃度） [kg/m^3] [kmol/m^3]

2.1.2　コントロールボリューム

微小なコントロールボリューム（図 2.1）を考える。コントロールボリュームの各境界面での値を表す変数（速度や温度）には下付文字をつけて表す。x 方向に垂直な左側の面は下付 $_{x-}$ で、右側の面は下付 $_{x+}$ で、y 方向に垂直な下側の面は下付 $_{y-}$ で、上側の面は下付 $_{y+}$ で、z 方向に垂直な奥側の面は下付 $_{z-}$ で、手前側の面は下付 $_{z+}$ で表される。下付きのない変数はコントロールボリュームでの代表値の値とする。

コントロールボリュームのそれぞれの面について、コントロールボリュームの各面に面積ベクトルをとると以下のように書ける。面積ベクトルとは、対象とする面の単位法線ベクトルに面積をかけたベクトルである。

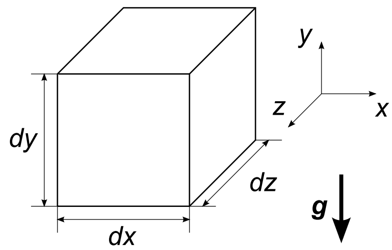

図 2.1 Control Volume

x 軸に垂直 yz 面左

$$\boldsymbol{A}_{x-} = (dydz, 0, 0) \tag{2.2}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\boldsymbol{A}_{x+} = (dydz, 0, 0) \tag{2.3}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\boldsymbol{A}_{y-} = (0, dzdx, 0) \tag{2.4}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\boldsymbol{A}_{y+} = (0, dzdx, 0) \tag{2.5}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\boldsymbol{A}_{z-} = (0, 0, dxdy) \tag{2.6}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\boldsymbol{A}_{z+} = (0, 0, dxdy) \tag{2.7}$$

2.1.3 非定常項

式 (2.1) において、”コントロールボリューム内に持っている物理量の時間変化”は

$$\text{コントロールボリューム内に持っている物理量の時間変化} = \frac{\partial \text{持っている物理量}}{\partial t}$$

と表す。この項を非定常項と呼び、増加するとコントロールボリューム内の保存量が増加し、運動量であれば、速度が速くなる。

例として図 2.2 のような排出口のある水槽をコントロールボリュームとして、考えてみる。

支配方程式をたてる対象の物理量を水の体積 [m^3] とする。”コントロールボリューム内に持っている物理量の時間変化”は水槽に溜まっている水の量 V[m^3] の時間変化 $\dfrac{\partial V}{\partial t}$[m^3/s] で表される (ここで t[s] は時間)。式 (2.1) における”時間あたりに境界面でコントロールボリュームに出入りする物理量”は水槽に入る水と出る水の差な

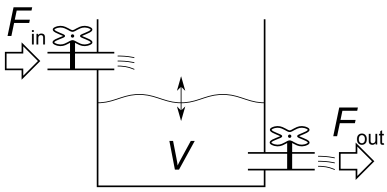

図 2.2 Control Volume Water

ので $F_{in} - F_{out}$[m³/s] で表される。水槽の中での水の生成や消滅は考えないので、この水槽をコントロールボリュームとした水の体積に対する支配方程式は次の式で表される。

$$\frac{\partial V}{\partial t} = F_{in} - F_{out}$$

水槽が密閉されており中の水の様子が観察できない場合でも、上式に水の流入量と流出量を代入することにより、水の体積の変化を知ることができる。

他の例として、物理量が運動量で左辺が正の値（物理量が増加する）であれば、コントロールボリュームでの速度が増加する。物理量がエネルギーであれば、コントロールボリュームでの温度が上昇する。流入量と流出量が等しければ、右辺の合計はゼロとなり、水の体積の時間変化がなくなる。この時、時間に対して変化せず定常状態となる。

2.1.4 出入の項 差の計算

境界面でのコントロールボリュームへの出入は、コントロールボリュームを流体内にとった場合、流出入する流体によって運ばれる対流と、分子運動により運ばれる拡散、その他の作用する現象に分けられ、以下のように表せる。

$$\begin{aligned}&\text{時間あたりにコントロールボリュームに出入する物理量}\\&\qquad = \text{対流による出入} + \text{拡散による出入} + \text{その他の出入}\end{aligned}$$

このコントロールボリュームで時間あたりにコントロールボリューム内で生成される物理量を生成量と書けば、式 (2.1) は

$$\frac{\partial \text{持っている物理量}}{\partial t} = \text{対流による出入} + \text{拡散による出入} + \text{その他の出入} + \text{生成量} \tag{2.8}$$

と書ける。上式のようにコントロールボリューム内の物理量が増えると正となるので出入は“ 入る量 - 出る量 ”で計算される。

この式中の出入の量の求め方を考える。図 2.1 の左側の yz 面で、物理量の出入 F_{x-} があるとする。このときの、右の yz 面での出入を考える。yz 面を通過する出入の量は x の位置によって異なり、F は x の関数である。コントロールボリューム左側から右側に x 方向の位置が dx だけ変わるとき、それぞれでの出入の量、F_{x-}

と F_{x+} の値はどう違うだろうか。図 2.3 に示すように、左側の面での流量 F の x 方向への変化量（傾き）は、x で微分した値、$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-}$ となる。図 2.3 のグラフのように傾きは $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-}$ であるので、dx 離れた右側の位置での縦軸の F の微小変化量 dF は、傾きに dx をかけた $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx$ となる。よって、右側の面での出入の量、F_{x+} は次のように表される。

$$F_{x+} = F_{x-} + dF = F_{x-} + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx \tag{2.9}$$

x 方向の yz 面における出入の量は、これらの左側の面での F_{x-} と右側の面での F_{x+} から求められる。左側と右側の面では、コントロールボリュームに対して、出る方向と入る方向が逆になるので、差をとると、コントロールボリュームでの x 方向の出入の量となる。例えば左から右、x の正の方向に物理量が移っている場合は、左の面では入る方向で増加するプラス、右の面では出て行き減少しマイナスとなる。式で表すと、

$$\begin{aligned} F_{x-} - F_{x+} &= F_{x-} - \left(F_{x-} + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx\right) \\ &= - \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。式 (2.8) の“ 対流による出入 ”、“ 拡散による出入 ”、“ その他の出入 ”の項は上式 (2.10) で表される。入ってくる物理量はベクトルで表され、ベクトルの変化は発散[1]で表される。

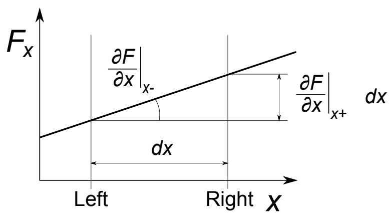

図 2.3 Diffusion

2.1.5 出入の項 対流

対流による出入は”質量流量×質量あたりの物理量”で表される。この“ 対流による出入 ”について考える。対流は移流とも呼ばれ、流体中で流れによって対象とする物理量が運ばれる現象である。例として、図 2.4 のように水槽の中で、インクの濃度を物理量として考えてみる。水槽の下半分にインクをゆっくり入れ、その後上半分に水をゆっくり注ぐと、インクと水はほとんど混ざらず、上部に水、下部にインクの層ができる。この時、水槽の底から上向きの流れを作ったとき（水槽の底にストローが刺さっており、勢いよくインクを入れたとき）インク（濃度の高い流体）が上に向かって流れることにより、インクが水槽下部から上部へ運ばれる。

[1]ベクトル $\boldsymbol{F}$ に対する発散は $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix}$ である。

この上向きの流れが発生した位置にコントロールボリュームをとると、下向きの面では対流によりインク（濃度の高い流体）が入り、上向きの面では対流により水（濃度の低い流体）が出て行くことになり、”対流による出入 ”がおこる。

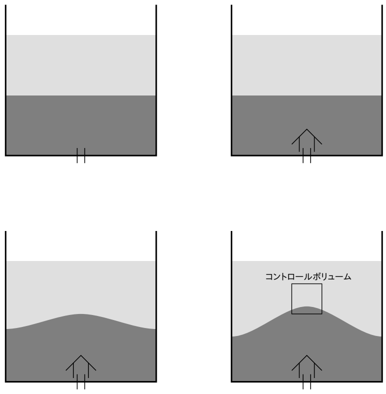

図 2.4 Advection

対流により出入りする量は、対象とする物理量を運ぶ流れの強さによる。例えば図 2.1 の左側の面から一秒あたりに対象とする物理量が流入する量 $F_{adv,x-}$ を考える。この $F_{adv,x-}$ を左側の面に流入する質量流量 $\dot{m}_{x-}$ によって表すと、次のようになる。

$$F_{adv,x-} = \phi \dot{m}_{x-}$$

ここで ϕ は単位質量あたりの対象とする物理量を表す。インクの例であれば、1kg 中に含まれるインクの質量（濃度）が ϕ に入る。質量流量 $\dot{m}_{x-}$[kg/s] は流体の密度 ρ_{x-} [kg/m³] と体積流量 V_{x-} [m³/s] で

$$\dot{m}_{x-} = \rho_{x-} V_{x-}$$

と表される。また、体積流量 V_{x-} [m³/s] は、通過する図 2.1 の左側の面 $\boldsymbol{A}_{x-}$ [m²] の面積が微小 $(dydz)$ であるので、速度の分布は一様であるとし、x 方向の速度 $\boldsymbol{v}_{x-}$ [m/s] と面積 $\boldsymbol{A}_{x-}$ [m²] で（速度ベクトルと面積ベクトルの内積）

$$V_{x-} = \boldsymbol{v}_{x-} \cdot \boldsymbol{A}_{x-} = u_{x-} dydz$$

速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] は x 方向成分速度 u [m/s]、y 方向成分速度 v [m/s]、z 方向成分速度 w [m/s] で次のように表される。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

上記三式から、対象とする物理量が流入する量 $F_{adv,x-}$ は

$$F_{adv,x-} = \phi \rho u_{x-} dydz$$

と表される。

2.1.6 出入の項 拡散

対象とする物理量の値に分布がある場合に、流体の流れではなく分子運動によって物理量が運ばれるのが拡散である。拡散は流れによる輸送ではないので、拡散のみの場合は流れは起きない（流体の速度はゼロ)。物質拡散では、分子が入れ替わることにより物質が運ばれる。水槽の上部と下部で水とインクの層を乱さないように静かに作ったとき、流れを起こさなくても、次第に水とインクの境界が曖昧になり、長い時間の後には、水とインクが混ざり、水槽の中身はすべて薄いインクとなる。流れがないときにゆっくりと混ざる現象を拡散と呼ぶ。水の入った水槽に、ゆっくりとインクを一滴落とした後に、インクが薄くなり、広がっていくのも拡散である。

拡散の影響は式 (2.8) の“ 拡散による出入 ”で表され、運動量の拡散（粘性[2])、エネルギーの拡散（熱伝導)、物質拡散がある。それぞれの物理量に勾配があるとき、拡散による輸送量 F_{dif} は拡散係数 D [m²/s]（運動量では動粘性係数、エネルギーでは熱拡散係数、物質では物質拡散係数）により、次式により表される[3]。

$$F_{dif} = -D\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi$$

ここで ϕ は単位質量あたりの対象とする物理量を表す。図 2.1 の左側の面を考えると、

$$F_{dif,x-} = -D\boldsymbol{A}_{x-} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi_{x-} = -D \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x-} dydz$$

この拡散の項は運動量、エネルギー、化学種の保存式でそれぞれ以下のようになる。

運動量 (ニュートンの粘性法則)

粘性による x 方向速度成分 u [m/s] の y 方向の速度勾配による剪断応力 τ [N/m²] は粘性係数 μ [Pa·s] により次式で表される。

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

エネルギー (フーリエの法則)

x 方向の温度勾配による熱流速 q [W/m²] は熱伝導率 k [W/(K·m)] により

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

伝熱量 Q [W] は伝熱の面積 A [m²] とともに次式で表される。

$$Q = -k\frac{\partial T}{\partial x}dydz$$

[2]容器の中に粘性係数が高い流体（例えば水飴）と粘性係数が低い流体（例えば空気）で満たしその中で手を動かした時、手が流体に与えた運動量が拡散すると遠くの流体も手と一緒に動き、手は大きな力を感じる。運動量が拡散しづらい流体では近くの流体しか手と一緒に動かないので、手はあまり大きな力を感じない。

[3]$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

化学種 (フィックの拡散法則)

質量流束 j [kg/(m²·s)] は濃度（質量分率）ω [-]([kg/kg]) の x 方向の勾配により拡散係数 D [m²/s] を用いて次式で表される。

$$j = -\rho D \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

2.1.7 微小項の取り扱い

コントロールボリュームの体積あたりの微小量 (dx, dy, dz) は十分に小さく無視できると考える。微小体積のコントロールボリュームを考えている（2.1.2 節）ため、体積は $dxdydz$ で表される。よって式中では体積あたりの値における微少量 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいとして無視する。

また、項が $dxdydz$ で括られている、または式全体を $dxdydz$ で割った場合には、各境界面での変数の値の差は微小量であるため、各境界面の違いは無視し、下付をつけない。例えば、式 (2.9) で表される x 軸に垂直な面の左側と右側での差を考える。式 (2.9) より x 軸に垂直な面の左側と右側での変数 F の関係は以下のようになる。

$$F_{x+} = F_{x-} + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x-} dx$$

これがコントロールボリュームの体積あたりの値（$dxdydz$ で割った式）であるとすれば、右辺第二項は微小量であるので、無視し、次式のように x 軸左側と右側の値が等しくなり、下付をつけないコントロールボリュームの代表値として表される。

$$F_{x+} = F_{x-} = F$$

2.2 質量保存

質量の保存において、コントロールボリュームへの出入は対流のみであり、質量が生成される核反応等は考慮しないため、式 (2.8) の“ 拡散による出入 ”と“ その他の出入”、“ 生成量”の項は考慮しない。流体は等方的であるとする。

2.2.1 持っている質量の時間変化

コントロールボリュームの体積は $dxdydz$ [m³]、質量 m [kg]= $\rho dxdydz$ で表されるので、

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz \tag{2.11}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

密度 ρ [kg/m³] が一定であれば、時間での微分値は 0 となる（変化しない）ので、非圧縮性流体では非定常項は 0 となる。

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = 0 \tag{2.12}$$

2.2.2 対流による質量の出入

各面に時間あたりに流入する質量は質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] であり、速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ [m/s] と面積ベクトル (式 (2.2)-式 (2.7))、密度 ρ [kg/m³] によりそれぞれの面で次のように表される。途中式 (2.9) を用いる。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

展開後に微分の四乗となる項 ($dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2$) は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\dot{m}_{x-} = \rho_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} \cdot \boldsymbol{A}_{x-} = \rho_{x-}u_{x-}dydz \tag{2.13}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned} \dot{m}_{x+} = \rho_{x+}\boldsymbol{v}_{x+} \cdot \boldsymbol{A}_{x+} = \rho_{x+}u_{x+}dydz &= \left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\ &= \left(\rho_{x-}u_{x-} + \rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx + u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right)dydz \end{aligned} \tag{2.14}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-} = \rho_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} \cdot \boldsymbol{A}_{y-} = \rho_{y-}v_{y-}dzdx \tag{2.15}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned} \dot{m}_{y+} = \rho_{y+}\boldsymbol{v}_{y+} \cdot \boldsymbol{A}_{y+} = \rho_{y+}v_{y+}dzdx &= \left(\rho_{y-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)\left(v_{y-} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\ &= \left(\rho_{y-}v_{y-} + \rho_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy + v_{y-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-} dy + \underbrace{\left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right)dzdx \end{aligned} \tag{2.16}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\dot{m}_{z-} = \rho_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} \cdot \boldsymbol{A}_{z-} = \rho_{z-}w_{z-}dxdy \tag{2.17}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\dot{m}_{z+} = \rho_{z+}\boldsymbol{v}_{z+} \cdot \boldsymbol{A}_{z+} = \rho_{z+}w_{z+}dxdy = \left(\rho_{z-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)\left(w_{z-} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy$$

$$= \left(\rho_{z-} w_{z-} + \rho_{z-} \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz + w_{z-} \left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z-} dz + \underbrace{\left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \right) dxdy \tag{2.18}$$

まず xyz 軸それぞれに垂直な面の和を求め、その和が“ 対流による質量の出入”となる。各軸に垂直な面の和をとる際に、出て行く方向が正となるように符号を加える（x 軸に垂直な右の面では、x 軸の正の方向で出る方向なので、負号 − を加え向きを変える)。

x **軸に垂直面** 式 (2.13)− 式 (2.14)

$$-\left(\rho_{x-} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} + u_{x-} \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} \right) dxdydz \tag{2.19}$$

y **軸に垂直面** 式 (2.15)− 式 (2.16)

$$-\left(\rho_{y-} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} + v_{y-} \left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-} \right) dxdydz \tag{2.20}$$

z **軸に垂直面** 式 (2.17)− 式 (2.18)

$$-\left(\rho_{z-} \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} + w_{z-} \left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z-} \right) dxdydz \tag{2.21}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.19)+ 式 (2.20)+ 式 (2.21) をとると、コントロールボリューム全体での対流による質量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$-\left\{ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} dxdydz = -(\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho) dxdydz$$

$$= -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dxdyxz \tag{2.22}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

x **軸に垂直** yz **面左**

$$\dot{m}_{x-} = \rho \boldsymbol{v}_{x-} \cdot \boldsymbol{A}_{x-} = \rho u_{x-} dydz \tag{2.23}$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$\dot{m}_{x+} = \rho \boldsymbol{v}_{x+} \cdot \boldsymbol{A}_{x+} = \rho u_{x+} dydz = \rho \left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx \right) dydz \tag{2.24}$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$\dot{m}_{y-} = \rho \boldsymbol{v}_{y-} \cdot \boldsymbol{A}_{y-} = \rho v_{y-} dzdx \tag{2.25}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\dot{m}_{y+} = \rho \boldsymbol{v}_{y+} \cdot \boldsymbol{A}_{y+} = \rho v_{y+} dzdx = \rho \left(v_{y-} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy \right) dzdx \tag{2.26}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\dot{m}_{z-} = \rho \boldsymbol{v}_{z-} \cdot \boldsymbol{A}_{z-} = \rho w_{z-} dxdy \tag{2.27}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\dot{m}_{z+} = \rho \boldsymbol{v}_{z+} \cdot \boldsymbol{A}_{z+} = \rho w_{z+} dxdy = \rho\left(w_{z-} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz \right) dxdy \tag{2.28}$$

まず xyz 軸それぞれに垂直な面の和を求め、その和が"対流による質量の出入"となる。各軸に垂直な面の和をとる際に、出て行く方向が正となるように符号を加える（x 軸に垂直な右の面では、x 軸の正の方向で出る方向なので、負号 $-$ を加え向きを変える）。

x 軸に垂直面 式 (2.23)$-$ 式 (2.24)

$$-\rho \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz \tag{2.29}$$

y 軸に垂直面 式 (2.25)$-$ 式 (2.26)

$$-\rho \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz \tag{2.30}$$

z 軸に垂直面 式 (2.27)$-$ 式 (2.28)

$$-\rho \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz \tag{2.31}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.29)+ 式 (2.30)+ 式 (2.31) をとると、コントロールボリューム全体での対流による質量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dxdydz = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} dxdydz \tag{2.32}$$

2.2.3 質量保存式（連続の式）

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

コントロールボリュームが持っている質量の時間変化式 (2.11)、対流による質量の出入 (2.22) を式 (2.8) へ代入し次式で質量保存式（連続の式とも呼ばれる）は表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dxdydz$$

両辺を $dxdydz$ で割ると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \tag{2.33}$$

が得られる。

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

コントロールボリュームが持っている質量の時間変化式 (2.12)、対流による質量の出入 (2.32) を式 (2.8) へ代入し次式で質量保存式（連続の式とも呼ばれる）は表される。

$$0 = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} dxdydz$$

両辺を密度 ρ [kg/m³] と微小体積 $dxdydz$ [m³] で割ると、

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.34}$$

が得られる。

2.3 運動量保存

ニュートンの第二法則より、運動量 $m\boldsymbol{v}$ [kg·m/s] と力 $\boldsymbol{F}$ [N] の関係は以下のように表される。

$$\frac{\partial m\boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F}$$

流れ系を考えているので、対流による運動量の出入を考え、力はコントロールボリュームの面にかかる力と体積にかかる力をそれぞれ考え、

$$\frac{\partial \text{持っている運動量}}{\partial t} = \text{対流による出入} + \text{表面力} + \text{体積力}^4 \tag{2.35}$$

上式のように表される。このうち、式 (2.8) の拡散による出入とその他の出入に表面力、生成量に体積力が相当する。流体は等方的でかつ密度以外の物性値など（粘性係数 μ [Pa·s]、重力加速度 $\boldsymbol{g}$ [m/s²]）は一定であると仮定する。

2.3.1 持っている運動量の時間変化

コントロールボリュームの体積は $dxdydz$ [m³]、質量 m [kg]= $\rho dxdydz$ で表されるので、速度ベクトルを $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ [m/s] とすれば、運動量の時間変化は次のように表すことが出来る。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

$$\frac{\partial m\boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \rho\boldsymbol{v}}{\partial t} dxdydz = \left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dxdydz = \begin{pmatrix} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \\ \rho\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \\ \rho\dfrac{\partial w}{\partial t} + w\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \end{pmatrix} dxdydx \tag{2.36}$$

[4] 重力や慣性力のように体積全体に作用する力が体積力、摩擦のように表面にのみ作用する力が表面力である

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

$$\frac{\partial m\boldsymbol{v}}{\partial t} = \rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dxdydz = \rho\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} dxdydx \tag{2.37}$$

2.3.2　対流による運動量の出入

対流による出入は"質量流量×質量当たりの運動量"で表される。質量当たりの運動量は $\boldsymbol{v}$ [m/s] である。

$$\dot{m}\boldsymbol{v}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

それぞれの面について、質量流量の式 (2.13)-(2.18) により運動量を求める。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\dot{m}_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} = \rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}dydz = \rho_{x-}\begin{pmatrix} u_{x-}^2 \\ u_{x-}v_{x-} \\ u_{x-}w_{x-} \end{pmatrix} dydz \tag{2.38}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}\boldsymbol{v}_{x+} &= \rho_{x+}u_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}dydz \\
&= \left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= \Bigg(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \underbrace{\rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx + \rho_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx + u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}}_{\text{計算は付録の式 }(A.4)p.66\text{ 参照}} \\
&\quad \underbrace{+\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^2 + u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^2 + \boldsymbol{v}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\
&\quad \underbrace{+\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^3}_{\text{十分に小さいため無視する}}\Bigg)dydz \\
&= \left(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_{x-} u_{x-}^2 + \left.\dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ \rho_{x-} u_{x-} v_{x-} + \left.\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ \rho_{x-} u_{x-} w_{x-} + \left.\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial x}\right|_{x-} dx \end{pmatrix} dydz \tag{2.39}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} = \rho_{y-} v_{y-} \boldsymbol{v}_{y-} dzdx = \rho_{y-} \begin{pmatrix} u_{y-} v_{y-} \\ v_{y-}^2 \\ v_{y-} w_{y-} \end{pmatrix} dzdx \tag{2.40}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned} \dot{m}_{y+}\boldsymbol{v}_{y+} &= \rho_{y+} v_{y+} \boldsymbol{v}_{y+} dzdx \\ &= \left(\rho_{y-} v_{y-} \boldsymbol{v}_{y-} + \left.\frac{\partial(\rho v \boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dy \right) dzdx \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{y-} u_{y-} v_{y-} + \left.\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ \rho_{y-} v_{y-}^2 + \left.\dfrac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ \rho_{y-} v_{y-} w_{y-} + \left.\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial y}\right|_{y-} dy \end{pmatrix} dzdx \end{aligned} \tag{2.41}$$

z 軸に垂直 xy 面下

$$\dot{m}_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} = \rho_{z-} w_{z-} \boldsymbol{v}_{z-} dxdy = \rho_{z-} \begin{pmatrix} u_{z-} w_{z-} \\ v_{z-} w_{z-} \\ w_{z-}^2 \end{pmatrix} dxdy \tag{2.42}$$

z 軸に垂直 xy 面上

$$\begin{aligned} \dot{m}_{z+}\boldsymbol{v}_{z+} &= \rho_{z+} w_{z+} \boldsymbol{v}_{z+} dxdy \\ &= \left(\rho_{z-} w_{z-} \boldsymbol{v}_{z-} + \left.\frac{\partial(\rho w \boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dz \right) dxdy \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{z-} u_{z-} w_{z-} + \left.\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ \rho_{z-} v_{z-} w_{z-} + \left.\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ \rho_{z-} w_{z-}^2 + \left.\dfrac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}\right|_{z-} dz \end{pmatrix} dxdy \end{aligned} \tag{2.43}$$

出る方向が負となるように xyz 軸に垂直な面それぞれを足し合わせ、その和が”対流による運動量の出入”となる。

x 軸に垂直面 式 (2.38)− 式 (2.39)

$$\begin{aligned}
&\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}dydz - \left(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= -\left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz \\
&= -\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial x}\right|_{x-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.44}$$

y 軸に垂直面 式 (2.40)− 式 (2.41)

$$\begin{aligned}
&\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}dydz - \left(\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} + \left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\
&= -\left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz \\
&= -\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial y}\right|_{y-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}\right|_{y-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial y}\right|_{y-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.45}$$

z 軸に垂直面 式 (2.42)− 式 (2.43)

$$\begin{aligned}
&\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}dydz - \left(\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} + \left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\
&= -\left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz \\
&= -\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial z}\right|_{z-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial z}\right|_{z-} \\ \left.\dfrac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}\right|_{z-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.46}$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.44)+ 式 (2.45)+ 式 (2.46) をとると、コントロールボリューム全体での対流による運動量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$-\left(\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$
= -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} \end{pmatrix} dxdydz
$$

$$
= -\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho u \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho v \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho w \boldsymbol{v}) \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.47}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ $[\mathbf{kg/m^3}]$ は一定）

それぞれの面について、質量流量の式 (2.23)-(2.28) により運動量を求める。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\dot{m}_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} = \rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}dydz = \rho \begin{pmatrix} u_{x-}^2 \\ u_{x-}v_{x-} \\ u_{x-}w_{x-} \end{pmatrix} dydz \tag{2.48}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}\boldsymbol{v}_{x+} &= \rho u_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}dydz \\
&= \rho\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= \rho\left(u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \underbrace{u_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx + \boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx}_{\text{計算は付録の式 }(A.1)p.65\text{ 参照}} + \underbrace{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right)dydz \\
&= \rho\left(u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial (u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= \rho \begin{pmatrix} u_{x-}^2 + \left.\dfrac{\partial (u^2)}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ u_{x-}v_{x-} + \left.\dfrac{\partial (uv)}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ u_{x-}w_{x-} + \left.\dfrac{\partial (uw)}{\partial x}\right|_{x-} dx \end{pmatrix} dydz
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$
\dot{m}_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} = \rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}dzdx = \rho \begin{pmatrix} u_{y-}v_{y-} \\ v_{y-}^2 \\ v_{y-}w_{y-} \end{pmatrix} dzdx \tag{2.50}
$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{y+}\boldsymbol{v}_{y+} &= \rho v_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}dzdx \\
&= \rho\left(v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} + \left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\
&= \rho \begin{pmatrix} u_{y-}v_{y-} + \left.\dfrac{\partial(uv)}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ v_{y-}^2 + \left.\dfrac{\partial(v^2)}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ v_{y-}w_{y-} + \left.\dfrac{\partial(vw)}{\partial y}\right|_{y-} dy \end{pmatrix} dzdx
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

z **軸に垂直** xy **面下**

$$
\dot{m}_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} = \rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}dxdy = \rho \begin{pmatrix} u_{z-}w_{z-} \\ v_{z-}w_{z-} \\ w_{z-}^2 \end{pmatrix} dxdy \tag{2.52}
$$

z **軸に垂直** xy **面上**

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{z+}\boldsymbol{v}_{z+} &= \rho w_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}dxdy \\
&= \rho\left(w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} + \left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\
&= \rho \begin{pmatrix} u_{z-}w_{z-} + \left.\dfrac{\partial(uw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ v_{z-}w_{z-} + \left.\dfrac{\partial(vw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ w_{z-}^2 + \left.\dfrac{\partial(w^2)}{\partial z}\right|_{z-} dz \end{pmatrix} dxdy
\end{aligned} \tag{2.53}
$$

出る方向が負となるように xyz 軸に垂直な面それぞれを足し合わせ、その和が”対流による運動量の出入”となる。

x **軸に垂直面** 式 (2.48)− 式 (2.49)

$$
\begin{aligned}
&\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}dydz - \rho\left(u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-} + \left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= -\rho \left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v})}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz \\
&= -\rho \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(u^2)}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\dfrac{\partial(uw)}{\partial x}\right|_{x-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

y **軸に垂直面** 式 (2.50)− 式 (2.51)

$$
\begin{aligned}
&\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}dydz - \rho\left(v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-} + \left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\
&= -\rho \left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v})}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz \\
&= -\rho \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(uv)}{\partial y}\right|_{y-} \\ \left.\dfrac{\partial(v^2)}{\partial y}\right|_{y-} \\ \left.\dfrac{\partial(vw)}{\partial y}\right|_{y-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

z **軸に垂直面** 式 (2.52)− 式 (2.53)

$$
\begin{aligned}
&\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}dydz - \rho\left(w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-} + \left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\
&= -\rho \left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz \\
&= -\rho \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial(uw)}{\partial z}\right|_{z-} \\ \left.\dfrac{\partial(vw)}{\partial z}\right|_{z-} \\ \left.\dfrac{\partial(w^2)}{\partial z}\right|_{z-} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

xyz 軸での出入の総和、式 (2.54)+ 式 (2.55)+ 式 (2.56) をとると、コントロールボリューム全体での対流による運動量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。変形[5] し、質量保存式 (2.34) を代入する。

$$
\begin{aligned}
&-\rho\left(\frac{\partial(u\boldsymbol{v})}{\partial x}+\frac{\partial(v\boldsymbol{v})}{\partial y}+\frac{\partial(w\boldsymbol{v})}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -\rho \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(u^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(uv)}{\partial y} + \dfrac{\partial(uw)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(uv)}{\partial x} + \dfrac{\partial(v^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(vw)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(uw)}{\partial x} + \dfrac{\partial(vw)}{\partial y} + \dfrac{\partial(w^2)}{\partial z} \end{pmatrix} dxdydz \\
&= -\rho \begin{pmatrix} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial y} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\dfrac{\partial w}{\partial z} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ v\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} + v\dfrac{\partial w}{\partial z} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ w\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + w\dfrac{\partial v}{\partial y} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + 2w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
$$

[5] 計算は付録の式 (A.2) p. 65 参照

$$
= -\rho \begin{pmatrix}
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + u\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}} \\
u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + v\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}} \\
u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + w\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}
\end{pmatrix} dxdydz
$$

$$
= -\rho \begin{pmatrix}
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} u \\
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} v \\
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} w
\end{pmatrix} dxdydz \tag{2.57}
$$

2.3.3 表面に作用する力

それぞれの面に作用する力を、図 2.5 に示すように面に垂直方向応力を σ [Pa]、平行な剪断応力を τ [Pa] とし、xyz 方向の成分に分けて考える。外に向かう力が正となるように方向を決める。

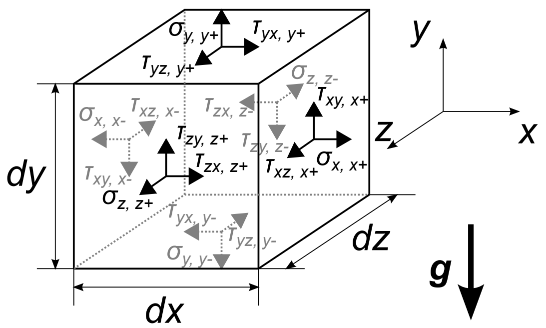

図 2.5 Control Volume

下記の式 (2.58)[6] と式 (2.59) の関係 [1] を用いる。

$$
P = -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{2.58}
$$

垂直応力と剪断応力の釣り合いより次式となる。

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x - \sigma_y &= 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
\sigma_y - \sigma_z &= 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\sigma_z - \sigma_x &= 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.59}
$$

[6] この式中の P [Pa] は流体力学的圧力である。詳しくは参考文献 [1] を参照のこと。

式 (2.58) へ式 (2.59) を変形して代入し、それぞれの方向の垂直応力 σ [Pa] は次のように表される。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -P + \mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\\
\sigma_y &= -P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -P + \mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\\
\sigma_z &= -P + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -P + \mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

平行方向の剪断応力 τ [Pa] はニュートンの粘性法則より、それぞれ次のように表される [1]。図 2.5 のように下添え字の最初の文字が面に垂直な軸を、次の文字が方向を表している。

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
\tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

式 (2.60) と式 (2.61) から、それぞれの面に掛かる力を求める。力は外への方向が正となっている。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x,x-}dydz \\ \tau_{xy,x-}dydz \\ \tau_{xz,x-}dydz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{x-} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right) \end{pmatrix} dydz \tag{2.62}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma_{x,x+}dydz \\ \tau_{xy,x+}dydz \\ \tau_{xz,x+}dydz \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -P_{x+} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x+}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x+} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x+}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+}\right) \end{pmatrix} dydz \\
&= \begin{pmatrix} -\left(P_{x-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx\right) + \mu\left\{\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right)dx\right\} \\ \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right)dx\right\} \\ \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)dx\right\} \end{pmatrix} dydz
\end{aligned} \tag{2.63}$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$\begin{pmatrix} \tau_{yx,y-}dzdx \\ \\ \sigma_{y,y-}dzdx \\ \\ \tau_{yz,y-}dzdx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-} \right) \\ -P_{y-} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y-}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} \right) \end{pmatrix} dzdx \tag{2.64}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \tau_{yx,y+}dzdx \\ \\ \sigma_{y,y+}dzdx \\ \\ \tau_{yz,y+}dzdx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y+} \right) \\ -P_{y+} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y+} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y+}\right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y+} \right) \end{pmatrix} dzdx \\ &= \begin{pmatrix} \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-} \right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-} \right)dy\right\} \\ -\left(P_{y-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y-} dy\right) + \mu\left\{\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y-}\right)dy\right\} \\ \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} \right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} \right)dy\right\} \end{pmatrix} dzdx \end{aligned} \tag{2.65}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$\begin{pmatrix} \tau_{zx,z-}dxdy \\ \\ \tau_{zy,z-}dxdy \\ \\ \sigma_{z,z-}dxdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} \right) \\ -P_{z-} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z-}\right) \end{pmatrix} dxdy \tag{2.66}$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \tau_{zx,z+}dxdy \\ \\ \tau_{zy,z+}dxdy \\ \\ \sigma_{z,z+}dxdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z+} \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z+} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z+} \right) \\ -P_{z+} + \mu\left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z+} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z+}\right) \end{pmatrix} dxdy \\ &= \begin{pmatrix} \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} \right)dz\right\} \\ \mu\left\{\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} \right)dz\right\} \\ -\left(P_{z-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial z}\right|_{z-} dz\right) + \mu\left\{\left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z-}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(2\left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} - \dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z-}\right)dz\right\} \end{pmatrix} dxdy \end{aligned} \tag{2.67}$$

コントロールボリュームから出る方向に働く力が正としているので、符号をあわせ xyz 軸に垂直な面それぞれを足し合わせ、その和が“ 表面に作用する力”となる。

x **軸に垂直面** − 式 (2.62)+ 式 (2.63)

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\sigma_{x,x-}+\sigma_{x,x+} \\ -\tau_{xy,x-}+\tau_{xy,x+} \\ -\tau_{xz,x-}+\tau_{xz,x+} \end{pmatrix} dydz \\
&= \begin{pmatrix}
\begin{gathered}-\left\{-P_{x-}+\mu\left(2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right)\right\}+\left[-\left(P_{x-}+\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\right. \\ \left.+\mu\left\{\left(2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right)dx\right\}\right]\end{gathered} \\
-\left\{\mu\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right)\right\}+\left[\mu\left\{\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right)dx\right\}\right] \\
-\left\{\mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)\right\}+\left[\mu\left\{\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)dx\right\}\right]
\end{pmatrix} dydz \\
&= \begin{pmatrix}
-\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-}dx+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right)dx\} \\
\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right)dx \\
\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)dx
\end{pmatrix} dydz \\
&= \begin{pmatrix}
-\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-}+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{x-}\right) \\
\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right) \\
\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)
\end{pmatrix} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

y **軸に垂直面** − 式 (2.64)+ 式 (2.65)

$$
\begin{pmatrix} -\tau_{yx,y-}+\tau_{yx,y+} \\ -\sigma_{y,y-}+\sigma_{y,y+} \\ -\tau_{yz,y-}+\tau_{yz,y+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix}
\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-}+\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-}\right) \\
-\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y-}+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(2\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{y-}\right) \\
\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-}+\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}\right)
\end{pmatrix} dxdydz \tag{2.69}
$$

z **軸に垂直面** − 式 (2.66)+ 式 (2.67)

$$
\begin{pmatrix} -\tau_{zx,z-}+\tau_{zx,z+} \\ -\tau_{zy,z-}+\tau_{zy,z+} \\ -\sigma_{z,z-}+\sigma_{z,z+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix}
\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-}+\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-}\right) \\
\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-}+\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-}\right) \\
-\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z-}+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(2\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{z-}\right)
\end{pmatrix} dxdydz \tag{2.70}
$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.68)+ 式 (2.69)+ 式 (2.70) をとると、コントロールボリューム全体での表面に作用する力が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)+\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\\
\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial P}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)+\mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\\
\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial P}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(2\dfrac{\partial w}{\partial z}-\dfrac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)
\end{pmatrix}dxdydz\\
&=\begin{pmatrix}
-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\\
-\dfrac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\\
-\dfrac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{pmatrix}dxdydz\\
&=\begin{pmatrix}
-\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\boldsymbol{\nabla}^2 u+\dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\\
-\dfrac{\partial P}{\partial y}+\mu\boldsymbol{\nabla}^2 v+\dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\\
-\dfrac{\partial P}{\partial z}+\mu\boldsymbol{\nabla}^2 w+\dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})
\end{pmatrix}dxdydz\\
&=\left[-\boldsymbol{\nabla}P+\mu\left\{\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right\}\right]dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

密度変化を考慮しないため、質量保存式（連続の式 (2.34)）より $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$ となり、式 (2.60) は次のように表される。

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -P+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\
\sigma_y &= -P+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\\
\sigma_z &= -P+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\}
\tag{2.72}
$$

σ の式 (2.72) と τ の式 (2.61) から、それぞれの面に掛かる力を求める。力は外への方向が正となっている。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\begin{pmatrix}
\sigma_{x,x-}dydz\\
\tau_{xy,x-}dydz\\
\tau_{xz,x-}dydz
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-P_{x-}+2\mu\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\\
\mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-}\right)\\
\mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-}+\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}\right)
\end{pmatrix}dydz
\tag{2.73}
$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{x,x+}dydz \\ \tau_{xy,x+}dydz \\ \tau_{xz,x+}dydz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{x+} + 2\mu \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+} \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x+} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x+} \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+} \right) \end{pmatrix} dydz
$$

$$
= \begin{pmatrix} -\left(P_{x-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx\right) + 2\mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x-} dx + \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x-} dx \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{x-} dx + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \right) \end{pmatrix} dydz \tag{2.74}
$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$
\begin{pmatrix} \tau_{yx,y-}dzdx \\ \sigma_{y,y-}dzdx \\ \tau_{yz,y-}dzdx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-} \right) \\ -P_{y-} + 2\mu \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} \right) \end{pmatrix} dzdx \tag{2.75}
$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$
\begin{pmatrix} \tau_{yx,y+}dzdx \\ \sigma_{y,y+}dzdx \\ \tau_{yz,y+}dzdx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y+} \right) \\ -P_{y+} + 2\mu \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y+} \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y+} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y+} \right) \end{pmatrix} dzdx
$$

$$
= \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y-} dy + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|_{y-} dy \right) \\ -\left(P_{y-} + \left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y-} dy\right) + 2\mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{y-} dy \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right|_{y-} dy + \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y-} dy \right) \end{pmatrix} dzdx \tag{2.76}
$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$
\begin{pmatrix} \tau_{zx,z-}dxdy \\ \tau_{zy,z-}dxdy \\ \sigma_{z,z-}dxdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} \right) \\ -P_{z-} + 2\mu \left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} \end{pmatrix} dxdy \tag{2.77}
$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{pmatrix} \tau_{zx,z+}dxdy \\ \tau_{zy,z+}dxdy \\ \sigma_{z,z+}dxdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+} + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{z+} \right) \\ \mu\left(\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{z+} + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z+} \right) \\ -P_{z+} + 2\mu \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z+} \end{pmatrix} dxdy$$

$$= \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{z-} dz + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right|_{z-} dz \right) \\ \mu\left(\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right|_{z-} dz + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_{z-} dz \right) \\ -\left(P_{z-} + \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z-} dz \right) + 2\mu\left(\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right|_{z-} dz \right) \end{pmatrix} dxdy \tag{2.78}$$

コントロールボリュームから出る方向に働く力が正としているので、符号をあわせ xyz 軸に垂直な面それぞれを足し合わせ、その和が" 表面に作用する力"となる。

x **軸に垂直面** $-$ 式 (2.73)+ 式 (2.74)

$$\begin{pmatrix} -\sigma_{x,x-} + \sigma_{x,x+} \\ -\tau_{xy,x-} + \tau_{xy,x+} \\ -\tau_{xz,x-} + \tau_{xz,x+} \end{pmatrix} dydz$$

$$= \begin{pmatrix} -\left\{ -P_{x-} + 2\mu \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} \right\} + \left\{ -\left(P_{x-} + \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx \right) + 2\mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \right) \right\} \\ -\left\{ \mu\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} \right) \right\} + \left\{ \mu\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x-} dx + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x-} dx \right) \right\} \\ -\left\{ \mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} \right) \right\} + \left\{ \mu\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{x-} dx + \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \right) \right\} \end{pmatrix} dydz$$

$$= \begin{pmatrix} -\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} dx + 2\mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \\ \mu \left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x-} dx + \mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x-} dx \\ \mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{x-} dx + \mu \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x-} dx \end{pmatrix} dydz$$

$$= \begin{pmatrix} -\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x-} + 2\mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x-} \\ \mu\left(\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x-} \right) \\ \mu\left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x-} \right) \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.79}$$

y 軸に垂直面 $-$ 式 (2.75)+ 式 (2.76)

$$\begin{pmatrix} -\tau_{yx,y-} + \tau_{yx,y+} \\ -\sigma_{y,y-} + \sigma_{y,y+} \\ -\tau_{yz,y-} + \tau_{yz,y+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|_{y-} \right) \\ -\left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y-} + 2\mu \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{y-} \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right|_{y-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y-} \right) \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.80}$$

z 軸に垂直面 $-$ 式 (2.77)+ 式 (2.78)

$$\begin{pmatrix} -\tau_{zx,z-} + \tau_{zx,z+} \\ -\tau_{zy,z-} + \tau_{zy,z+} \\ -\sigma_{z,z-} + \sigma_{z,z+} \end{pmatrix} dzdx = \begin{pmatrix} \mu\left(\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right|_{z-} \right) \\ \mu\left(\left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right|_{z-} + \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_{z-} \right) \\ -\left.\dfrac{\partial P}{\partial z}\right|_{z-} + 2\mu \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right|_{z-} \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.81}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.79)+ 式 (2.80)+ 式 (2.81) をとると、コントロールボリューム全体での表面に作用する力が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial P}{\partial x} + 2\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) - \dfrac{\partial P}{\partial y} + 2\mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \dfrac{\partial P}{\partial z} + 2\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{pmatrix} dxdydz \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{pmatrix} dxdydz \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) + \mu\boldsymbol{\nabla}^2 u \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) + \mu\boldsymbol{\nabla}^2 v \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) + \mu\boldsymbol{\nabla}^2 w \end{pmatrix} dxdydz \\
&= \left\{-\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\right\} dxdydz
\end{aligned}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）では、式 (2.34) より $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ であるので、次式となる。

$$\left(-\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\right) dxdydz \tag{2.82}$$

2.3.4 体積に作用する力

体積に作用する力は重力のみを考慮し、重力加速度は y 軸に平行下向きに働く $\boldsymbol{g} = (0, -g, 0)$ [m/s²] とすると、体積力（重力）は次式で表される。

$$m\boldsymbol{g} = \rho\boldsymbol{g}dxdydz = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} dxdydz \tag{2.83}$$

2.3.5 運動量保存式

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

式 (2.35) へ、式 (2.36)、式 (2.47)、式 (2.71)、式 (2.83) を入れると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dxdydx &= -\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho u\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho v\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho w\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} dxdydz + \left(-\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\mu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right)dxdydz + \rho\boldsymbol{g}dxdydz \\
\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho u\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho v\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho w\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} - \boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\mu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{g} \\
\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\begin{pmatrix} \rho u\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u + u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho \\ \rho v\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v + v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho \\ \rho w\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w + w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho \end{pmatrix} - \boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\mu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{g}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

質量保存式 (2.33) の両辺に速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] を掛けると次式となる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\} \\
&= -\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\} \\
&= -\begin{pmatrix} \rho u\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho \\ \rho v\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho \\ \rho w\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + w\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

上式を先ほど求めた運動量保存の式 (2.84) から引き密度 ρ [kg/m³] で割ると次式が得られる。ここで、ν [m²/s] は動粘性係数であり粘性係数 μ [Pa·s] により $\nu = \mu/\rho$ と表される。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\nu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{g} \tag{2.85}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\left\{\boldsymbol{\nabla}^2 u + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right\} \\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\left\{\boldsymbol{\nabla}^2 v + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right\} - g \\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\left\{\boldsymbol{\nabla}^2 w + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\right\} \end{pmatrix}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

式 (2.35) へ、式 (2.37)、式 (2.57)、式 (2.82)、式 (2.83) を入れると、以下の式が得られる。ここで、ν [m²/s] は動粘性係数であり粘性係数 μ [Pa·s] により $\nu = \mu/\rho$ と表される。

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dxdydx = -\rho\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w \end{pmatrix}dxdydz + \left(-\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\right)dxdydz + \rho\boldsymbol{g}dxdydz$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\rho\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w \end{pmatrix} - \boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{g} \tag{2.86}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\boldsymbol{\nabla}^2 u \\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\boldsymbol{\nabla}^2 v - g \\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\boldsymbol{\nabla}^2 w \end{pmatrix} \tag{2.87}$$

2.4 エネルギー保存

保存の対象として以下のエネルギーを考える。ここで m [kg] は保存対象の質量、v [m/s] は速度、g [m/s²] は重力加速度、h [m] は基準からの高さ、c_v [J/(K·kg)] は定積比熱、T [K] は温度である。流体は等方的でかつ密度以外の物性値など（重力加速度 $\boldsymbol{g}$ [m/s²]、定積比熱 c_v [J/(K·kg)]、熱伝導率 k [W/(K·m)]、粘性係数 μ[Pa·s]）は一定であると仮定する。

- 運動エネルギー（運動している物体が持っているエネルギー） $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$

- 位置エネルギー（重力によるエネルギー） mgh
- 界面エネルギー（界面を持つ流体間でのエネルギー　ここでは考慮しない）
- 内部エネルギー（系の持っているエネルギーから、運動・位置・界面エネルギーを除いたもの。主に顕熱 mc_vT と潜熱であるが、ここでは顕熱のみを考慮する。）

閉じた系では内部エネルギー U[J] のみを考慮し、エネルギーの保存は熱力学の第一法則より

$$\Delta U = Q + W$$

ここで、ΔU[J] は系の保有する内部エネルギーの変化量、Q[J] は熱、W[J] は仕事である。この系の内部エネルギーの時間変化量は、時間あたりに伝わる熱 $\dot{Q}$[W] と時間あたりの仕事 $\dot{W}$[W] で次のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{Q} + \dot{W} \tag{2.88}$$

今は開いた系（流れ系）を考えているので、上式 (2.88) の左辺の全エネルギー（運動・位置・内部エネルギー）の時間変化と右辺の“ 時間あたりに伝わる熱 ”、“ 時間あたりの仕事 ”に右辺の対流により運ばれる運動・位置・内部エネルギーが加えられる。“ 時間あたりに伝わる熱 ”が式 (2.8) における“ 拡散による出入 ”、“ 時間あたりの仕事 ”が“ その他の出入”となる。このことから、エネルギー方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{持っている全エネルギー}}{\partial t} &= \text{対流による全エネルギーの出入} + \text{時間あたりに伝わる熱} \\ &\quad + \text{時間あたりの仕事} + \text{生成エネルギー}\end{aligned} \tag{2.89}$$

式 (2.89) の各項について考えていく。その際、界面エネルギーと潜熱、生成エネルギーは考慮しない。

2.4.1　持っている全エネルギーの時間変化

コントロールボリュームの体積は $dxdydz$ [m³]、質量 m [kg]= $\rho dxdydz$ で表されるので、重力方向を y 方向とすれば、各エネルギーの時間変化は次のように表すことが出来る。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

運動エネルギー　（計算は付録の式 (A.3)p.65 参照）

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 dxdydz\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v}^2)}{\partial t}dxdydz \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial t} + \boldsymbol{v}^2\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dxdydz \\ &= \frac{1}{2}\left(2\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}^2\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dxdydz \\ &= \left(\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dxdydz\end{aligned}$$

位置エネルギー

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho g y dxdydz\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} g y dxdydz$$

内部エネルギー　（顕熱）

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_v T dxdydz\right) &= c_v \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} dxdydz \\ &= c_v \left(\rho \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dxdydz\end{aligned}$$

以上のエネルギーの時間変化の和 (運動エネルギー＋位置エネルギー＋内部エネルギー) から、持っている全エネルギーの時間変化は次式で表される。

$$\begin{aligned}&\left\{\rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} g y + c_v \left(\rho \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\right\} dxdydz \\ &= \left\{\rho \left(\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + c_v \frac{\partial T}{\partial t}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + g y + c_v T\right)\right\} dxdydz \qquad (2.90)\end{aligned}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

運動エネルギー　（計算は付録の式 (A.3)p.65 参照）

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 dxdydz\right) &= \frac{1}{2}\rho \frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial t} dxdydz \\ &= \rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} dxdydz\end{aligned}$$

位置エネルギー　（密度一定の仮定より）

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho g y dxdydz\right) = 0$$

内部エネルギー　（顕熱）

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_v T dxdydz\right) = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$$

以上のエネルギーの時間変化の和 (運動エネルギー＋位置エネルギー＋内部エネルギー) から、持っている全エネルギーの時間変化は次式で表される。

$$\rho \left(\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + c_v \frac{\partial T}{\partial t}\right) dxdydz \qquad (2.91)$$

2.4.2　対流によるエネルギーの出入

対流による時間あたりのエネルギーの出入は、“ 質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] ×質量あたりのエネルギー [J/kg]”で表すことが出来る。それぞれのエネルギーについて考えると

- 運動エネルギー

$$\dot{m}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \tag{2.92}$$

- 位置エネルギー

$$\dot{m}gy \tag{2.93}$$

- 内部エネルギー（顕熱）

$$\dot{m}c_vT \tag{2.94}$$

運動エネルギー

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

対流によるそれぞれの面での運動エネルギーの出入について、式（2.92）の質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] へ式（2.13）-（2.18）を代入すると次のようになる。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\frac{1}{2}\dot{m}_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2 = \frac{1}{2}\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2dydz \tag{2.95}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\dot{m}_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}^2 = \frac{1}{2}\rho_{x+}u_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}^2dydz \\
=&\frac{1}{2}\left(\rho_{x-}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\boldsymbol{v}_{x-}+\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)^2dydz \\
=&\frac{1}{2}\left\{\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2+2\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx+\rho_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right. \\
&\underbrace{+\rho_{x-}u_{x-}\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\right)^2dx^2+2\rho_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^2+2u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\
&\underbrace{+\boldsymbol{v}_{x-}^2\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2+\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\right)^2dx^3+u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\right)^2dx^3}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\
&\left.\underbrace{+2\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx^3+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\right)^2dx^4}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right\}dydz \\
=&\frac{1}{2}\left(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2+\left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v}^2)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned} \tag{2.96}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\frac{1}{2}\dot{m}_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 = \frac{1}{2}\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2dzdx \tag{2.97}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{m}_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}^2 &= \frac{1}{2}\rho_{y+}v_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}^2 dzdx \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 + \left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v}^2)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx\end{aligned} \tag{2.98}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\frac{1}{2}\dot{m}_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 = \frac{1}{2}\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 dxdy \tag{2.99}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{m}_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}^2 &= \frac{1}{2}\rho_{z+}w_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}^2 dxdy \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 + \left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy\end{aligned} \tag{2.100}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が“ 対流による運動エネルギーの出入”になる。

x 軸に垂直面 式 (2.95)− 式 (2.96)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2 dydz - \frac{1}{2}\left(\rho_{x-}u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2 + \left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v}^2)}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\ &= -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v}^2)}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.101}$$

y 軸に垂直面 式 (2.97)− 式 (2.98)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 dzdx - \frac{1}{2}\left(\rho_{y-}v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 + \left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v}^2)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\ &= -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v}^2)}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.102}$$

z 軸に垂直面 式 (2.99)− 式 (2.100)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 dxdy - \frac{1}{2}\left(\rho_{z-}w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 + \left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\ &= -\frac{1}{2}\left.\frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.103}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.101)+ 式 (2.102)+ 式 (2.103) をとると、コントロールボリューム全体での対流による運動エネルギーの出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\rho u\boldsymbol{v}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\boldsymbol{v}^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right)dxdydx \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left(\rho u\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial x} + \rho\boldsymbol{v}^2\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{v}^2 u\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \left(\rho v\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial y} + \rho\boldsymbol{v}^2\frac{\partial v}{\partial y} + \boldsymbol{v}^2 v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\right. \\ &\qquad\left. + \left(\rho w\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial z} + \rho\boldsymbol{v}^2\frac{\partial w}{\partial z} + \boldsymbol{v}^2 w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\left\{\rho\left(u\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial x}+v\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial y}+w\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right)+\rho\boldsymbol{v}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\boldsymbol{v}^2\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydx\\
&= -\frac{1}{2}\{\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}^2)+\rho\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\}dxdydx\\
&= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{v})dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.104}
$$

上式を完全に展開すると以下のようになる。三行目の式から示す。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left\{\rho\left(u\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial x}+v\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial y}+w\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right)+\rho\boldsymbol{v}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\boldsymbol{v}^2\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydx\\
&= -\frac{1}{2}\left\{\rho\left(u\frac{\partial(u^2+v^2+w^2)}{\partial x}+v\frac{\partial(u^2+v^2+w^2)}{\partial y}+w\frac{\partial(u^2+v^2+w^2)}{\partial z}\right)\right.\\
&\quad\left.+\rho(u^2+v^2+w^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+(u^2+v^2+w^2)\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydz\\
&= -\frac{1}{2}\left\{\rho\left(u\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+u\frac{\partial(v^2)}{\partial x}+u\frac{\partial(w^2)}{\partial x}+v\frac{\partial(u^2)}{\partial y}+v\frac{\partial(v^2)}{\partial y}+v\frac{\partial(w^2)}{\partial y}+w\frac{\partial(u^2)}{\partial z}+w\frac{\partial(v^2)}{\partial z}+w\frac{\partial(w^2)}{\partial z}\right)\right.\\
&\quad+\rho\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial v}{\partial y}+u^2\frac{\partial w}{\partial z}+v^2\frac{\partial u}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+v^2\frac{\partial w}{\partial z}+w^2\frac{\partial u}{\partial x}+w^2\frac{\partial v}{\partial y}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad\left.+\left(u^3\frac{\partial\rho}{\partial x}+u^2v\frac{\partial\rho}{\partial y}+u^2w\frac{\partial\rho}{\partial z}+uv^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+v^3\frac{\partial\rho}{\partial y}+v^2w\frac{\partial\rho}{\partial z}+uw^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+vw^2\frac{\partial\rho}{\partial y}+w^3\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydz\\
&= -\frac{1}{2}\left\{2\rho\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}+uv\frac{\partial v}{\partial x}+uw\frac{\partial w}{\partial x}+uv\frac{\partial u}{\partial y}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+vw\frac{\partial w}{\partial y}+uw\frac{\partial u}{\partial z}+vw\frac{\partial v}{\partial z}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right.\\
&\quad+\rho\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial v}{\partial y}+u^2\frac{\partial w}{\partial z}+v^2\frac{\partial u}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+v^2\frac{\partial w}{\partial z}+w^2\frac{\partial u}{\partial x}+w^2\frac{\partial v}{\partial y}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad\left.+\left(u^3\frac{\partial\rho}{\partial x}+u^2v\frac{\partial\rho}{\partial y}+u^2w\frac{\partial\rho}{\partial z}+uv^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+v^3\frac{\partial\rho}{\partial y}+v^2w\frac{\partial\rho}{\partial z}+uw^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+vw^2\frac{\partial\rho}{\partial y}+w^3\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydz
\end{aligned}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

対流によるそれぞれの面での運動エネルギーの出入について、式（2.92）の質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] へ式（2.23）-（2.28）を代入すると次のようになる。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\frac{1}{2}\dot{m}_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2=\frac{1}{2}\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2dydz
\tag{2.105}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\dot{m}_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}^2=\frac{1}{2}\rho u_{x+}\boldsymbol{v}_{x+}^2dydz\\
&=\frac{1}{2}\rho\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\boldsymbol{v}_{x-}+\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)^2dydz\\
&=\frac{1}{2}\left\{\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2+2\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}dx+\rho\boldsymbol{v}_{x-}^2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right.
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{+\rho u_{x-}\left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\right)^2 dx^2 + 2\rho \boldsymbol{v}_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-} dx^2 + \rho\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_{x-}\right)^2 dx^3}_{\text{十分に小さいため無視する}}
$$

$$
=\frac{1}{2}\left(\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2 + \rho\left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v}^2)}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \tag{2.106}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$
\frac{1}{2}\dot{m}_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 = \frac{1}{2}\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 dzdx \tag{2.107}
$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\dot{m}_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}^2 &= \frac{1}{2}\rho v_{y+}\boldsymbol{v}_{y+}^2 dzdx \\
&= \frac{1}{2}\left(\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 + \rho\left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v}^2)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx
\end{aligned} \tag{2.108}
$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$
\frac{1}{2}\dot{m}_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 = \frac{1}{2}\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 dxdy \tag{2.109}
$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\dot{m}_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}^2 &= \frac{1}{2}\rho w_{z+}\boldsymbol{v}_{z+}^2 dxdy \\
&= \frac{1}{2}\left(\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 + \rho\left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy
\end{aligned} \tag{2.110}
$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が“ 対流による運動エネルギーの出入”になる。

x 軸に垂直面 式 (2.105)− 式 (2.106)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2 dydz - \frac{1}{2}\left(\rho u_{x-}\boldsymbol{v}_{x-}^2 + \rho\left.\frac{\partial(u\boldsymbol{v}^2)}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= -\frac{1}{2}\rho\left.\frac{\partial\left(u\boldsymbol{v}^2\right)}{\partial x}\right|_{x-} dxdydx
\end{aligned} \tag{2.111}
$$

y 軸に垂直面 式 (2.107)− 式 (2.108)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 dzdx - \frac{1}{2}\left(\rho v_{y-}\boldsymbol{v}_{y-}^2 + \rho\left.\frac{\partial(v\boldsymbol{v}^2)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\
&= -\frac{1}{2}\rho\left.\frac{\partial\left(v\boldsymbol{v}^2\right)}{\partial y}\right|_{y-} dxdydx
\end{aligned} \tag{2.112}
$$

z 軸に垂直面 式 (2.109)− 式 (2.110)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 dxdy - \frac{1}{2}\left(\rho w_{z-}\boldsymbol{v}_{z-}^2 + \rho\left.\frac{\partial(w\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \\
&= -\frac{1}{2}\rho\left.\frac{\partial\left(w\boldsymbol{v}^2\right)}{\partial z}\right|_{z-} dxdydx
\end{aligned} \tag{2.113}
$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.111)+ 式 (2.112)+ 式 (2.113) をとると、コントロールボリューム全体での対流による運動エネルギーの出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\left(u\boldsymbol{v}^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(v\boldsymbol{v}^2\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(w\boldsymbol{v}^2\right)}{\partial z}\right)dxdydx \\
&=-\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial(uu^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uw^2)}{\partial x}+\frac{\partial(vu^2)}{\partial y}+\frac{\partial(vv^2)}{\partial y}+\frac{\partial(vw^2)}{\partial y}\right. \\
&\quad\left.+\frac{\partial(wu^2)}{\partial z}+\frac{\partial(wv^2)}{\partial z}+\frac{\partial(ww^2)}{\partial z}\right)dxdydx \\
&=-\frac{1}{2}\rho\left(u\frac{\partial u^2}{\partial x}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v^2}{\partial x}+v^2\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial w^2}{\partial x}+w^2\frac{\partial u}{\partial x}\right. \\
&\quad+v\frac{\partial u^2}{\partial y}+u^2\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial v^2}{\partial y}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial w^2}{\partial y}+w^2\frac{\partial v}{\partial y} \\
&\quad\left.+w\frac{\partial u^2}{\partial z}+u^2\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial v^2}{\partial z}+v^2\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial w^2}{\partial z}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdydx \\
&=-\frac{1}{2}\rho\left\{u\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{\partial w^2}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial u^2}{\partial y}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial w^2}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial u^2}{\partial z}+\frac{\partial v^2}{\partial z}+\frac{\partial w^2}{\partial z}\right)\right. \\
&\quad\left.+u^2\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}+v^2\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}+w^2\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}\right\}dxdydx \\
&=-\frac{1}{2}\rho\left\{u\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial x}+v\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial y}+w\frac{\partial(\boldsymbol{v}^2)}{\partial z}\right\}dxdydz \\
&=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}^2)dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

位置エネルギー

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

対流によるそれぞれの面での位置エネルギーの出入について、式（2.93）の質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] へ式（2.13）-（2.18）を代入すると次のようになる。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\dot{m}_{x-}g\left(y+\frac{dy}{2}\right)=\rho_{x-}gu_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \tag{2.115}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}g\left(y+\frac{dy}{2}\right)=&\rho_{x+}gu_{x+}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \\
=&g\left(\rho_{x-}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz \\
=&g\left\{\rho_{x-}u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+\rho_{x-}y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx+u_{x-}y\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right.
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2}\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dxdy+\frac{1}{2}u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}dxdy+\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\Bigg\}dydz$$

$$=g\left\{\rho_{x-}u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+y\left.\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right\}dydz \tag{2.116}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-}gy=\rho_{y-}gv_{y-}ydzdx \tag{2.117}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned}\dot{m}_{y+}g(y+dy)=&\rho_{y+}gv_{y+}(y+dy)dzdx\\=&g\left(\rho_{y-}+\left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)\left(v_{y-}+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)(y+dy)dzdx\\=&g\Bigg(\rho_{y-}v_{y-}y+\rho_{y-}v_{y-}dy+\rho_{y-}y\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy+v_{y-}y\left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-}dy\\&\underbrace{+\rho_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy^2+v_{y-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-}dy^2+y\left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy^2+\left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}dy^3}_{\text{十分に小さいため無視する}}\Bigg)dzdx\\=&g\left(\rho_{y-}v_{y-}y+y\left.\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right|_{y-}dy+\rho_{y-}v_{y-}dy\right)dzdx\\=&g\left(\rho_{y-}v_{y-}y+\left.\frac{\partial(\rho vy)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\end{aligned} \tag{2.118}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\dot{m}_{z-}g\left(y+\frac{dy}{2}\right)=\rho_{z-}gw_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy \tag{2.119}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}\dot{m}_{z+}g\left(y+\frac{dy}{2}\right)&=\rho_{z+}gw_{z+}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy\\&=g\left\{\rho_{z-}w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+y\left.\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right\}dxdy\end{aligned} \tag{2.120}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が“ 対流による位置エネルギーの出入”になる。

x 軸に垂直面 式 (2.115)− 式 (2.116)

$$\begin{aligned}&\rho_{x-}gu_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz-g\left\{\rho_{x-}u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)+y\left.\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right\}dydz\\&=-gy\left.\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right|_{x-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.121}$$

y 軸に垂直面 式 (2.117)− 式 (2.118)

$$\begin{aligned}&\rho_{y-}gv_{y-}ydzdx-g\left(\rho_{y-}v_{y-}y+\left.\frac{\partial(\rho vy)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\\&=-g\left.\frac{\partial(\rho vy)}{\partial y}\right|_{y-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.122}$$

z **軸に垂直面** 式 (2.119)− 式 (2.120)

$$\rho_{z-} g w_{z-} \left(y + \frac{dy}{2} \right) dxdy - g \left\{ \rho_{z-} w_{z-} \left(y + \frac{dy}{2} \right) + y \left. \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right|_{z-} dz \right\} dxdy$$
$$= -gy \left. \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right|_{z-} dxdydz \tag{2.123}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.121)+ 式 (2.122)+ 式 (2.123) をとると、コントロールボリューム全体での対流による位置エネルギーの出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$\begin{aligned}
&-g\left(y\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v y)}{\partial y} + y\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dxdydz \\
&= -g\left(\rho y\frac{\partial u}{\partial x} + uy\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho v\frac{\partial y}{\partial y} + \rho y\frac{\partial v}{\partial y} + vy\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho y\frac{\partial w}{\partial z} + wy\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dxdydz \\
&= -g\left\{ \rho y\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + y\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho v\frac{\partial y}{\partial y} \right\} dxdydz \\
&= -g(\rho y \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho + \rho v) dxdydz \\
&= -(gy\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) + \rho g v) dxdydz \qquad (2.124) \\
&= -g\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}y) dxdydz
\end{aligned}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

対流によるそれぞれの面での位置エネルギーの出入について、式（2.93）の質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] へ式（2.23）-（2.28）を代入すると次のようになる。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x **軸に垂直** yz **面左**

$$\dot{m}_{x-} g \left(y + \frac{dy}{2} \right) = \rho g u_{x-} \left(y + \frac{dy}{2} \right) dydz \tag{2.125}$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{x+} g \left(y + \frac{dy}{2} \right) &= \rho g u_{x+} \left(y + \frac{dy}{2} \right) dydz \\
&= \rho g \left(u_{x-} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x-} dx \right) \left(y + \frac{dy}{2} \right) dydz \\
&= \rho g \left\{ u_{x-} \left(y + \frac{dy}{2} \right) + y \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x-} dx + \underbrace{\frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x-} dxdy}_{\text{十分に小さいため無視する}} \right\} dydz \\
&= \rho g \left\{ u_{x-} \left(y + \frac{dy}{2} \right) + y \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x-} dx \right\} dydz \qquad (2.126)
\end{aligned}$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$\dot{m}_{y-} g y = \rho g v_{y-} y dzdx \tag{2.127}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{y+}g(y+dy) &= \rho g v_{y+}(y+dy)dzdx \\
&= \rho g\left(v_{y-} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)(y+dy)dzdx \\
&= \rho g\Bigg(v_{y-}y + y\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy + v_{y-}dy \underbrace{+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\Bigg)dzdx \\
&= \rho g\left(v_{y-}y + \left.\frac{\partial (vy)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx
\end{aligned}
\tag{2.128}
$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$
\dot{m}_{z-}g\left(y+\frac{dy}{2}\right) = \rho g w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy \tag{2.129}
$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{z+}g\left(y+\frac{dy}{2}\right) &= \rho g w_{z+}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy \\
&= \rho g\left\{w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right) + y\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz\right\}dxdy
\end{aligned}
\tag{2.130}
$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が“ 対流による位置エネルギーの出入”になる。

x 軸に垂直面 式 (2.125)− 式 (2.126)

$$
\begin{aligned}
&\rho g u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dydz - \rho g\left\{u_{x-}\left(y+\frac{dy}{2}\right) + y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\right\}dydz \\
&= -\rho g y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.131}
$$

y 軸に垂直面 式 (2.127)− 式 (2.128)

$$
\begin{aligned}
&\rho g v_{y-}ydzdx - \rho g\left(v_{y-}y + \left.\frac{\partial (vy)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx \\
&= -\rho g\left.\frac{\partial (vy)}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.132}
$$

z 軸に垂直面 式 (2.129)− 式 (2.130)

$$
\begin{aligned}
&\rho g w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right)dxdy - \rho g\left\{w_{z-}\left(y+\frac{dy}{2}\right) + y\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz\right\}dxdy \\
&= -\rho g y\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.133}
$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.131)+ 式 (2.132)+ 式 (2.133) をとると、コントロールボリューム全体での対流による位置エネルギーの出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$
-\rho g\left(y\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (vy)}{\partial y} + y\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdydz
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\rho g\left(y\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial y}{\partial y} + y\frac{\partial v}{\partial y} + y\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -\rho g\left\{v\frac{\partial y}{\partial y} + y\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}\right\}dxdydz \\
&= -\rho g v dxdydz \\
&= \rho \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}dxdydz
\end{aligned} \tag{2.134}
$$

内部エネルギー

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

対流による内部エネルギーの出入について、それぞれの面に、式（2.94）の質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] へ式（2.13）-（2.18）を代入する。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\dot{m}_{x-}c_vT_{x-} = \rho_{x-}c_vT_{x-}u_{x-}dydz \tag{2.135}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}c_vT_{x+} &= \rho_{x+}c_vT_{x+}u_{x+}dydz \\
=&c_v\left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(T_{x-} + \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
=&c_v\left(\rho_{x-}T_{x-}u_{x-} + \rho_{x-}T_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + \rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx + T_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}dx \underbrace{+\rho_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right. \\
&\left.\underbrace{+T_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2 + u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx^2 + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx^3}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right)dydz \\
=&c_v\left(\rho_{x-}T_{x-}u_{x-} + \rho_{x-}T_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + \rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dx + T_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
=&c_v\left(\rho_{x-}T_{x-}u_{x-} + \left.\frac{\partial(\rho T u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned} \tag{2.136}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$
\dot{m}_{y-}c_vT_{y-} = \rho_{y-}c_vT_{y-}v_{y-}dzdx \tag{2.137}
$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{y+}c_vT_{y+} &= \rho_{y+}c_vT_{y+}v_{y+}dzdx \\
=&c_v\left(\rho_{y-}T_{y-}v_{y-} + \left.\frac{\partial(\rho T v)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx
\end{aligned} \tag{2.138}
$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\dot{m}_{z-}c_vT_{z-} = \rho_{z-}c_vT_{z-}w_{z-}dxdy \tag{2.139}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}\dot{m}_{z+}c_vT_{z+} &= \rho_{z+}c_vT_{z+}w_{z+}dxdy\\ &=c_v\left(\rho_{z-}T_{z-}w_{z-} + \left.\frac{\partial(\rho Tw)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy\end{aligned} \tag{2.140}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が“ 対流による内部エネルギーの出入”になる。

x 軸に垂直面 式 (2.135)− 式 (2.136)

$$\begin{aligned}&\rho_{x-}c_vT_{x-}u_{x-}dydz - c_v\left(\rho_{x-}T_{x-}u_{x-} + \left.\frac{\partial(\rho Tu)}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz\\ &= -\, c_v \left.\frac{\partial(\rho Tu)}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.141}$$

y 軸に垂直面 式 (2.137)− 式 (2.138)

$$\begin{aligned}&\rho_{y-}c_vT_{y-}v_{y-}dzdx - c_v\left(\rho_{y-}T_{y-}v_{y-} + \left.\frac{\partial(\rho Tv)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx\\ &= -\, c_v \left.\frac{\partial(\rho Tv)}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.142}$$

z 軸に垂直面 式 (2.139)− 式 (2.140)

$$\begin{aligned}&\rho_{z-}c_vT_{z-}w_{z-}dxdy - c_v\left(\rho_{z-}T_{z-}w_{z-} + \left.\frac{\partial(\rho Tw)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy\\ &= -\, c_v \left.\frac{\partial(\rho Tw)}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz\end{aligned} \tag{2.143}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.141)+ 式 (2.142)+ 式 (2.143) をとると、コントロールボリューム全体での対流による内部エネルギーの出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$\begin{aligned}&-c_v\left(\frac{\partial(\rho Tu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Tv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Tw)}{\partial z}\right)dxdydz\\ &= -c_v\left(\rho T\frac{\partial u}{\partial x} + \rho u\frac{\partial T}{\partial x} + Tu\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho T\frac{\partial v}{\partial y} + \rho v\frac{\partial T}{\partial y} + Tv\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho T\frac{\partial w}{\partial z} + \rho w\frac{\partial T}{\partial z} + Tw\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)dxdydz\\ &= -c_v\left\{\rho T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) + T\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydz\\ &= -c_v(\rho T\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T + T\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho)dxdydz\\ &= -c_v\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v})dxdydz\end{aligned} \tag{2.144}$$

非圧縮性流体（密度 ρ $[\mathrm{kg/m^3}]$ は一定）

対流による内部エネルギーの出入について、それぞれの面に、式（2.94）の質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] へ式（2.23）-（2.28）を代入する。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\dot{m}_{x-}c_vT_{x-} = \rho c_v T_{x-}u_{x-}dydz \tag{2.145}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{x+}c_vT_{x+} &= \rho c_v T_{x+}u_{x+}dydz \\
&= \rho c_v\left(T_{x-} + \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= \rho c_v\left(T_{x-}u_{x-} + T_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx + u_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} dx + \underbrace{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right)dydz \\
&= \rho c_v\left(T_{x-}u_{x-} + T_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx + u_{x-}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz \\
&= \rho c_v\left(T_{x-}u_{x-} + \left.\frac{\partial (Tu)}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz
\end{aligned} \tag{2.146}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\dot{m}_{y-}c_vT_{y-} = \rho c_v T_{y-}v_{y-}dzdx \tag{2.147}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{y+}c_vT_{y+} &= \rho c_v T_{y+}v_{y+}dzdx \\
&= \rho c_v\left(T_{y-}v_{y-} + \left.\frac{\partial (Tv)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx
\end{aligned} \tag{2.148}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\dot{m}_{z-}c_vT_{z-} = \rho c_v T_{z-}w_{z-}dxdy \tag{2.149}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{z+}c_vT_{z+} &= \rho c_v T_{z+}w_{z+}dxdy \\
&= \rho c_v\left(T_{z-}w_{z-} + \left.\frac{\partial (Tw)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy
\end{aligned} \tag{2.150}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が“ 対流による内部エネルギーの出入”になる。

x **軸に垂直面** 式 (2.145)− 式 (2.146)

$$\begin{aligned}&\rho c_v T_{x-} u_{x-} dydz - \rho c_v \left(T_{x-} u_{x-} + \left.\frac{\partial (Tu)}{\partial x}\right|_{x-} dx \right) dydz \\ &= -\rho c_v \left.\frac{\partial (Tu)}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz \end{aligned} \tag{2.151}$$

y **軸に垂直面** 式 (2.147)− 式 (2.148)

$$\begin{aligned}&\rho c_v T_{y-} v_{y-} dzdx - \rho c_v \left(T_{y-} v_{y-} + \left.\frac{\partial (Tv)}{\partial y}\right|_{y-} dy \right) dzdx \\ &= -\rho c_v \left.\frac{\partial (Tv)}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz \end{aligned} \tag{2.152}$$

z **軸に垂直面** 式 (2.149)− 式 (2.150)

$$\begin{aligned}&\rho c_v T_{z-} w_{z-} dxdy - \rho c_v \left(T_{z-} w_{z-} + \left.\frac{\partial (Tw)}{\partial z}\right|_{z-} dz \right) dxdy \\ &= -\rho c_v \left.\frac{\partial (Tw)}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz \end{aligned} \tag{2.153}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.151)+ 式 (2.152)+ 式 (2.153) をとると、コントロールボリューム全体での対流による内部エネルギーの出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$\begin{aligned}&-\rho c_v \left(\frac{\partial (Tu)}{\partial x} + \frac{\partial (Tv)}{\partial y} + \frac{\partial (Tw)}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= -\rho c_v \left(T\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial T}{\partial x} + T\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial T}{\partial y} + T\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial T}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= -\rho c_v \left\{ u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} + T \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{式 (2.34) より 0}} \right\} dxdydz \\ &= -\rho c_v \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T dxdydz \end{aligned} \tag{2.154}$$

2.4.3 時間あたりに伝わる熱

時間あたりに伝わる熱の量（伝熱量）として、熱伝導による伝熱と熱輻射による伝熱が考えられるが、熱伝導のみを考慮する。熱伝導による伝熱量 Q [W] はフーリエの法則より次式で表される。

$$Q = -k \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \tag{2.155}$$

ここで、$\boldsymbol{A}$ は面積 [m^2]、k は熱伝導率 [W/(Km)] である。上式より、コントロールボリュームのそれぞれの面における熱伝導による伝熱量を求める。

x **軸に垂直** yz **面左**

$$-k\boldsymbol{A}_{x-}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{x-}=-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}dydz \tag{2.156}$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$\begin{aligned}-k\boldsymbol{A}_{x+}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{x+}&=-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+}dydz\\&=-k\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{x-}\right)dydz\\&=-k\biggl(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x-}dx\biggr)dydz\end{aligned} \tag{2.157}$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$-k\boldsymbol{A}_{y-}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{y-}=-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{d}zdx \tag{2.158}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\begin{aligned}-k\boldsymbol{A}_{y+}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{y+}&=-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+}dzdx\\&=-k\biggl(\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y-}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{y-}dy\biggr)dzdx\end{aligned} \tag{2.159}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$-k\boldsymbol{A}_{z-}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{z-}=-k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{d}xdy \tag{2.160}$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{aligned}-k\boldsymbol{A}_{z+}\cdot\boldsymbol{\nabla}T_{z+}&=-k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+}dxdy\\&=-k\biggl(\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z-}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|_{z-}dz\biggr)dxdy\end{aligned} \tag{2.161}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が" 時間あたりに伝わる熱" になる。

x **軸に垂直面** 式 (2.156)− 式 (2.157)

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{d}ydz+k\biggl(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x-}dx\biggr)dydz=k\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x-}dxdydz \tag{2.162}$$

y **軸に垂直面** 式 (2.158)− 式 (2.159)

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{d}zdz+k\biggl(\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y-}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{y-}dy\biggr)dzdx=k\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{y-}dxdydz \tag{2.163}$$

z **軸に垂直面** 式 (2.160)− 式 (2.161)

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{d}xdy+k\biggl(\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z-}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|_{z-}dz\biggr)dxdy=k\left.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|_{z-}dxdydz \tag{2.164}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.162)+ 式 (2.163)+ 式 (2.164) をとると、コントロールボリューム全体での時間あたりに伝わる熱が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$
\begin{aligned}
&k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)dxdydz \\
&= k\boldsymbol{\nabla}^2 T dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.165}
$$

2.4.4 時間あたりの仕事

時間あたりの仕事（仕事率）は面に作用する力と速度の内積で表される[7]。面に作用する力は図 2.5 を参照 (p. 23)。コントロールボリュームのそれぞれの面について考える。その際、展開後に微分の四乗となる項 ($dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2$) は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{x,x-} \\ \tau_{xy,x-} \\ \tau_{xz,x-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{x-} \\ v_{x-} \\ w_{x-} \end{pmatrix} dydz = (\sigma_{x,x-}u_{x-} + \tau_{xy,x-}v_{x-} + \tau_{xz,x-}w_{x-})dydz \tag{2.166}
$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma_{x,x+} \\ \tau_{xy,x+} \\ \tau_{xz,x+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{x+} \\ v_{x+} \\ w_{x+} \end{pmatrix} dydz &= \begin{pmatrix} \sigma_{x,x-} + \left.\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ \tau_{xy,x-} + \left.\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ \tau_{xz,x-} + \left.\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right|_{x-} dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{x-} + \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ v_{x-} + \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} dx \\ w_{x-} + \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} dx \end{pmatrix} dydz \\
&= \Bigg(\sigma_{x,x-}u_{x-} + \sigma_{x,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx + u_{x-}\left.\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_{x-} dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\
&\quad + \tau_{xy,x-}v_{x-} + \tau_{xy,x-}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} dx + v_{x-}\left.\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right|_{x-} dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\
&\quad + \tau_{xz,x-}w_{x-} + \tau_{xz,x-}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} dx + w_{x-}\left.\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right|_{x-} dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-} dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\Bigg)dydz
\end{aligned}
\tag{2.167}
$$

[7]

仕事 [J] = 力 [N] × 距離 [m]

仕事率 [W] = 力 [N] × 距離 [m]/時間 [s] = 力 [N] × 速度 [m/s] = 応力 [Pa] × 速度 [m/s] × 面積 [m^2]

y **軸に垂直** zx **面下**

$$\begin{pmatrix} \tau_{yx,y-} \\ \sigma_{x,x-} \\ \tau_{yz,y-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{y-} \\ v_{y-} \\ w_{y-} \end{pmatrix} dzdx = (\tau_{yx,y-}u_{y-} + \sigma_{y,y-}v_{y-} + \tau_{yz,y-}w_{y-})dzdx \tag{2.168}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tau_{yx,y+} \\ \sigma_{y,y+} \\ \tau_{yz,y+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{y+} \\ v_{y+} \\ w_{y+} \end{pmatrix} dzdx &= \begin{pmatrix} \tau_{yx,y-} + \left.\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ \sigma_{y,y-} + \left.\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ \tau_{yz,y-} + \left.\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right|_{y-} dy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{y-} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ v_{y-} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy \\ w_{y-} + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} dy \end{pmatrix} dzdx \\ &= \Bigg(\tau_{yx,y-}u_{y-} + \tau_{yx,y-} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} dy + u_{y-} \left.\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right|_{y-} dy + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right|_{y-} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-} dy^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\ &+ \sigma_{y,y-}v_{y-} + \sigma_{y,y-} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy + v_{y-} \left.\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y}\right|_{y-} dy + \underbrace{\left.\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y}\right|_{y-} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-} dy^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\ &+ \tau_{yz,y-}w_{y-} + \tau_{yz,y-} \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} dy + w_{y-} \left.\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right|_{y-} dy + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right|_{y-} \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-} dy^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \Bigg) dzdx \end{aligned} \tag{2.169}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$\begin{pmatrix} \tau_{zx,z-} \\ \tau_{zy,z-} \\ \sigma_{z,z-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{z-} \\ v_{z-} \\ w_{z-} \end{pmatrix} dxdy = (\tau_{zx,z-}u_{z-} + \tau_{zy,z-}v_{z-} + \sigma_{z,z-}w_{z-})dxdy \tag{2.170}$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tau_{zx,z+} \\ \tau_{zy,z+} \\ \sigma_{z,z+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{z+} \\ v_{z+} \\ w_{z+} \end{pmatrix} dxdy &= \begin{pmatrix} \tau_{zx,z-} + \left.\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ \tau_{zy,z-} + \left.\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ \sigma_{z,z-} + \left.\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}\right|_{z-} dz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{z-} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ v_{z-} + \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} dz \\ w_{z-} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz \end{pmatrix} dxdy \\ &= \Bigg(\tau_{zx,z-}u_{z-} + \tau_{zx,z-} \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} dz + u_{z-} \left.\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right|_{z-} dz + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-} dz^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\ &+ \tau_{zy,z-}v_{z-} + \tau_{zy,z-} \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} dz + v_{z-} \left.\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right|_{z-} dz + \underbrace{\left.\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-} dz^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\ &+ \sigma_{z,z-}w_{z-} + \sigma_{z,z-} \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz + w_{z-} \left.\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}\right|_{z-} dz + \underbrace{\left.\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-} dz^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \Bigg) dxdy \end{aligned} \tag{2.171}$$

各面にかかる力はコントロールボリュームから出る方向を正としているので、符号をあわせて xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が“ 時間あたりの仕事”になる。

x **軸に垂直面** $-$ 式 (2.166)+ 式 (2.167)

$$\left(\sigma_{x,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}+u_{x-}\left.\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_{x-}+\tau_{xy,x-}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x-}+v_{x-}\left.\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right|_{x-}+\tau_{xz,x-}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x-}+w_{x-}\left.\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right|_{x-}\right)dxdydz \tag{2.172}$$

y **軸に垂直面** $-$ 式 (2.168)+ 式 (2.169)

$$\left(\tau_{yx,y-}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y-}+u_{y-}\left.\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right|_{y-}+\sigma_{y,y-}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y-}+v_{y-}\left.\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y}\right|_{y-}+\tau_{yz,y-}\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-}+w_{y-}\left.\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right|_{y-}\right)dxdydz \tag{2.173}$$

z **軸に垂直面** $-$ 式 (2.170)+ 式 (2.171)

$$\left(\tau_{zx,z-}\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z-}+u_{z-}\left.\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right|_{z-}+\tau_{zy,z-}\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z-}+v_{z-}\left.\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right|_{z-}+\sigma_{z,z-}\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z-}+w_{z-}\left.\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}\right|_{z-}\right)dxdydz \tag{2.174}$$

ここで、式 (2.60) で表される面に垂直な応力 σ_x、σ_y、σ_z [Pa] を圧力と粘性力の項に分け、次のように表す。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -P+\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)=-P+\tau_{xx}\\
\sigma_y &= -P+\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)=-P+\tau_{yy}\\
\sigma_z &= -P+\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)=-P+\tau_{zz}
\end{aligned}\right\} \tag{2.175}$$

式 (2.172)、式 (2.173)、式 (2.174) の和に上式の σ を代入すると、次式となる。ここで、コントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$\begin{aligned}
&\Big\{\big(-P+\tau_{xx}\big)\frac{\partial u}{\partial x}+\big(-P+\tau_{yy}\big)\frac{\partial v}{\partial y}+\big(-P+\tau_{zz}\big)\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\quad+u\frac{\partial}{\partial x}\big(-P+\tau_{xx}\big)+v\frac{\partial}{\partial y}\big(-P+\tau_{yy}\big)+w\frac{\partial}{\partial z}\big(-P+\tau_{zz}\big)\\
&\quad+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}\\
&\quad+u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\Big\}dxdydz\\
=&\bigg(-P\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial v}{\partial y}-P\frac{\partial w}{\partial z}-u\frac{\partial P}{\partial x}-v\frac{\partial P}{\partial y}-w\frac{\partial P}{\partial z}\\
&\quad\underbrace{+\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{粘性により熱へと変化するエネルギーを表す散逸項であり、乱れが大きくなければ影響が小さいため無視する。散逸エネルギーについては詳細を付録 }A.3(p.68)\text{ に記す。}}\\
&\quad+u\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\bigg)dxdydz\\
=&\bigg(-P\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial v}{\partial y}-P\frac{\partial w}{\partial z}-u\frac{\partial P}{\partial x}-v\frac{\partial P}{\partial y}-w\frac{\partial P}{\partial z}\\
&\quad+u\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\bigg)dxdydz
\end{aligned} \tag{2.176}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

xyz 軸での出入の総和式 (2.176) へ面に垂直な τ の式 (2.175) と面に平行な τ の式 (2.61) を代入すると、コントロールボリューム全体での時間あたりの仕事が次式で求められる。

$$
\begin{aligned}
&\biggl(-P\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial v}{\partial y}-P\frac{\partial w}{\partial z}-u\frac{\partial P}{\partial x}-v\frac{\partial P}{\partial y}-w\frac{\partial P}{\partial z}\\
&\quad+u\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}+u\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\biggr)dxdydz\\
=&\biggl[-P\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\\
&\quad+u\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}+v\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}+w\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}\\
&\quad+\mu u\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}+\mu v\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\\
&\quad+\mu w\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}\biggr]dxdydz\\
=&\biggl(-P\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\\
&\quad+\mu\biggl[u\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&\quad+v\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&\quad+w\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\biggr]\biggr)dxdydz\\
=&\biggl[-\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\left\{-P+\frac{1}{3}\mu\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad+\mu\left\{u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\right\}\biggr]dxdydz\\
=&\left\{-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\bigl(u\boldsymbol{\nabla}^2u+v\boldsymbol{\nabla}^2v+w\boldsymbol{\nabla}^2w\bigr)\right\}dxdydz\\
=&\left\{-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\right\}dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.177}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

密度 ρ [kg/m³] が一定の非圧縮性流体の場合は面に垂直な τ の式 (2.175) は質量保存の式 (2.34)$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$ から次式のようになる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= -P+\mu\Bigl(2\frac{\partial u}{\partial x}-\underbrace{\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.34) より 0}}\Bigr)=-P+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=-P+\tau_{xx}\\
\sigma_y &= -P+\mu\Bigl(2\frac{\partial v}{\partial y}-\underbrace{\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.34) より 0}}\Bigr)=-P+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=-P+\tau_{yy}\\
\sigma_z &= -P+\mu\Bigl(2\frac{\partial w}{\partial z}-\underbrace{\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{式 (2.34) より 0}}\Bigr)=-P+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=-P+\tau_{zz}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.178}
$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.176) へ面に垂直な τ [Pa] の上式 (2.178) と面に平行な τ [Pa] の式 (2.61) を代入すると、コントロールボリューム全体での時間あたりの仕事が次式で求められる。

$$
\begin{aligned}
&\left(-P\frac{\partial u}{\partial x} - P\frac{\partial v}{\partial y} - P\frac{\partial w}{\partial z} - u\frac{\partial P}{\partial x} - v\frac{\partial P}{\partial y} - w\frac{\partial P}{\partial z}\right.\\
&\quad \left. + u\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + w\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + u\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + v\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + w\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + w\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) dxdydz\\
&= \left[-P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right.\\
&\quad + 2\mu\left(u\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad + \mu u\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\} + \mu v\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\\
&\quad \left. + \mu w\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}\right] dxdydz\\
&= \left(-P\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}} - \left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right.\\
&\quad + \mu\left[u\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}\right\}\right.\\
&\quad + v\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}\right\}\\
&\quad \left.\left. + w\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}\right\}\right]\right) dxdydz\\
&= \left[-\left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right.\\
&\quad \left. + \mu\left\{u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\right\}\right] dxdydz\\
&= \left\{ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P + \mu\left(u\boldsymbol{\nabla}^2 u + v\boldsymbol{\nabla}^2 v + w\boldsymbol{\nabla}^2 w\right)\right\} dxdydz\\
&= \left(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\right) dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.179}
$$

2.4.5 エネルギー保存式

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

式 (2.89) へ、式 (2.90)、式 (2.104)、式 (2.124)、式 (2.144)、式 (2.165)、式 (2.177) を入れると、

$$
\begin{aligned}
&\left\{\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + gy + c_v T\right)\right\} dxdydz\\
&= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{v})dxdydz - \{gy\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) + \rho g v\}dxdydz - c_v\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v})dxdydz + k\boldsymbol{\nabla}^2 T dxdydz\\
&\quad + \left\{-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P + \left(-P + \frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + \mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\right\} dxdydz
\end{aligned}
$$

dxdydz で両辺を割ると次式となる。

$$\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+gy+c_vT\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{v})-gy\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})-\rho gv-c_v\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v})+k\boldsymbol{\nabla}^2T$$
$$-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big)+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} \tag{2.180}$$

ここで質量保存式の式 (2.33) より、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

これを上式 (2.180) の左辺に代入し整理すると次式となる。

$$\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)-\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+gy+c_vT\right)}_{\text{右辺の項と釣合い消える}}$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^2+\underbrace{\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right\}-gy\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})-c_v\{T\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})}_{\text{左辺の項と釣合い消える}}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T\}$$
$$-\rho gv+k\boldsymbol{\nabla}^2T-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big)+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}$$

$$\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^2-\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T-\rho gv+k\boldsymbol{\nabla}^2T$$
$$-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\left(-P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big)+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} \tag{2.181}$$

上式から運動量の保存式 (2.85) と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] の内積を引く。式 (2.85) と $\boldsymbol{v}$ [m/s] の内積は以下のようになる。また、両辺に ρ [kg/m^3] を掛けている。

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\rho\boldsymbol{v}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}$$

上式を A.2(p. 67) の変形と $\boldsymbol{g}$ の計算をすると次式となる。

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}-\rho gv$$

式 (2.181) から上式を引くと次式のエネルギー保存式を得る。

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=-\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T+k\boldsymbol{\nabla}^2T-P\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.182}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

式 (2.89) へ、式 (2.91)、式 (2.114)、式 (2.134)、式 (2.154)、式 (2.165)、式 (2.179) を入れると、

$$\rho\left(\boldsymbol{v}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right)dxdydz=-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}^2)dxdydz+\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}dxdydz-\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}Tdxdydz$$

$$+ k\boldsymbol{\nabla}^2 T dxdydz + \{-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\}\, dxdydz$$

両辺を $dxdydz$ で割って次式を得る。

$$\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + c_v\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}^2) + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} - \rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T$$
$$+ k\boldsymbol{\nabla}^2 T - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} \tag{2.183}$$

上式から運動量の保存式 (2.86) と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] の内積を引く。式 (2.86) と $\boldsymbol{v}$ [m/s] の内積は以下のようになる。

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\rho\boldsymbol{v}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w\end{pmatrix} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}$$
$$= -\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}^2) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P + \mu\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}$$

式 (2.183) から上式を引くと次式となる。上式の変形の詳細は A.2(p. 67) に示す。

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} = -\,\rho c_v\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T + k\boldsymbol{\nabla}^2 T \tag{2.184}$$

上式を ρ [kg/m³] c_v [J/(kg ·K)] で割り、熱拡散率（温度伝導率）a [m²/s]= $\dfrac{k}{\rho c_v}$ に置き換え次式を得る。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T + a\boldsymbol{\nabla}^2 T \tag{2.185}$$

2.5　成分の質量保存

コントロールボリューム中に多成分あるときそれぞれの成分の質量保存を考える。出入としては、対流と拡散によるものが考えられる。流体は等方的でかつ密度以外の物性値など（物質拡散係数 D_i [m²/s]）は一定であると仮定する。成分の質量保存は以下の成分 i の質量分率 ω_i [-] を用いて表される。

$$\omega_i = \frac{\rho_i}{\rho}$$

ここで ρ_i [kg/m³] は成分 i の密度、ρ [kg/m³] は全体の密度である。

2.5.1　持っている成分の質量の時間変化

コントロールボリュームの体積は $dxdydz$ [m³]、質量 m [kg]= $\rho dxdydz$ で表されるので、成分 i の質量 m_i [kg] の時間変化は次のように表すことが出来る。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = \frac{\partial(\omega_i m)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\omega_i)}{\partial t}dxdydz = \left(\rho\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \omega_i\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dxdydz \tag{2.186}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = \frac{\partial(\omega_i m)}{\partial t} = \rho\frac{\partial\omega_i}{\partial t}dxdydz \tag{2.187}$$

2.5.2 対流による成分の質量の出入

対流による成分の質量の出入は、“質量流量 [kg/s] ×質量分率 [kg/kg]”で表すことが出来る。成分 i について考えると

$$\dot{m}_i = \frac{\rho_i}{\rho}\dot{m} = \omega_i\dot{m}$$

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

それぞれの面について、質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] の式 (2.13)-(2.18) より以下が求まる。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\omega_{i,x-}\dot{m}_{x-} = \rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-}dydz \tag{2.188}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$\begin{aligned}
\omega_{i,x+dx}\dot{m}_{x+} &= \rho_{x+}\omega_{i,x+dx}u_{x+}dydz \\
&= \left(\rho_{x-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\omega_{i,x-} + \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
&= \Bigg(\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-} + \rho_{x-}\omega_{i,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + \rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx + \omega_{i,x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx \\
&\quad \underbrace{+\rho_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2 + \omega_{i,x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2 + u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}} \\
&\quad \underbrace{+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^3}_{\text{十分に小さいため無視する}}\Bigg)dydz \\
&= \left(\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-} + \rho_{x-}\omega_{i,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + \rho_{x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx + \omega_{i,x-}u_{x-}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned}$$

$$=\left(\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \tag{2.189}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\omega_{i,y-}\dot{m}_{y-}=\rho_{y-}\omega_{i,y-}v_{y-}dzdx \tag{2.190}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$\begin{aligned}\omega_{i,y+dy}\dot{m}_{y+}&=\rho_{y+}\omega_{i,y+dy}v_{y+}dzdx\\&=\left(\rho_{y-}\omega_{i,y-}v_{y-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\end{aligned} \tag{2.191}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\omega_{i,z-}\dot{m}_{z-}=\rho_{z-}\omega_{i,z-}w_{z-}dxdy \tag{2.192}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\begin{aligned}\omega_{i,z+dz}\dot{m}_{z+}&=\rho_{z+}\omega_{i,z+dz}w_{z+}dxdy\\&=\left(\rho_{z-}\omega_{i,z-}w_{z-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy\end{aligned} \tag{2.193}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が"対流による成分の質量の出入"になる。

x 軸に垂直面 式 (2.188)− 式 (2.189)

$$\begin{aligned}&\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-}dydz-\left(\rho_{x-}\omega_{i,x-}u_{x-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz\\&=-\left.\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.194}$$

y 軸に垂直面 式 (2.190)− 式 (2.191)

$$\begin{aligned}&\rho_{y-}\omega_{i,y-}v_{y-}dzdx-\left(\rho_{y-}\omega_{i,y-}v_{y-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\\&=-\left.\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.195}$$

z 軸に垂直面 式 (2.192)− 式 (2.193)

$$\begin{aligned}&\rho_{z-}\omega_{i,z-}w_{z-}dxdy-\left(\rho_{z-}\omega_{i,z-}w_{z-}+\left.\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy\\&=-\left.\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-}dxdydz\end{aligned} \tag{2.196}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.194)+ 式 (2.195)+ 式 (2.196) をとると、コントロールボリューム全体での対流による成分の質量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 $(dxdydz)$ で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$-\frac{\partial(\rho\omega_i u)}{\partial x}dxdydz-\frac{\partial(\rho\omega_i v)}{\partial y}dxdydz-\frac{\partial(\rho\omega_i w)}{\partial z}dxdydz$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\rho\omega_i\frac{\partial u}{\partial x} + \rho u\frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \omega_i u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\omega_i\frac{\partial v}{\partial y} + \rho v\frac{\partial \omega_i}{\partial y} + \omega_i v\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\omega_i\frac{\partial w}{\partial z} + \rho w\frac{\partial \omega_i}{\partial z} + \omega_i w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -\left\{\rho\left(u\frac{\partial \omega_i}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_i}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right) + \rho\omega_i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \omega_i\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right\}dxdydz \\
&= -\left(\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i + \rho\omega_i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \omega_i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\right)dxdydz \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\omega_i\boldsymbol{v})dxdydz
\end{aligned} \tag{2.197}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

それぞれの面について、質量流量 $\dot{m}$ [kg/s] の式 (2.23)-(2.28) より以下が求まる。その際、展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x 軸に垂直 yz 面左

$$\omega_{i,x-}\dot{m}_{x-} = \rho\omega_{i,x-}u_{x-}dydz \tag{2.198}$$

x 軸に垂直 yz 面右

$$
\begin{aligned}
\omega_{i,x+}\dot{m}_{x+} &= \rho\omega_{i,x+dx}u_{x+}dydz \\
&= \rho\left(\omega_{i,x-} + \left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(u_{x-} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
&= \rho\left(\omega_{i,x-}u_{x-} + \omega_{i,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + u_{x-}\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right)dydz \\
&= \rho\left(\omega_{i,x-}u_{x-} + \omega_{i,x-}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x-}dx + u_{x-}\left.\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz \\
&= \rho\left(\omega_{i,x-}u_{x-} + \left.\frac{\partial(\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz
\end{aligned} \tag{2.199}
$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$\omega_{i,y-}\dot{m}_{y-} = \rho\omega_{i,y-}v_{y-}dzdx \tag{2.200}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$
\begin{aligned}
\omega_{i,y+}\dot{m}_{y+} &= \rho\omega_{i,y+dy}v_{y+}dzdx \\
&= \rho\left(\omega_{i,y-}v_{y-} + \left.\frac{\partial(\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx
\end{aligned} \tag{2.201}
$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$\omega_{i,z-}\dot{m}_{z-} = \rho\omega_{i,z-}w_{z-}dxdy \tag{2.202}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$\omega_{i,z+}\dot{m}_{z+} = \rho\omega_{i,z+dz}w_{z+}dxdy$$

$$= \rho\left(\omega_{i,z-}w_{z-} + \left.\frac{\partial(\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy \tag{2.203}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が"対流による成分の質量の出入"になる。

x 軸に垂直面 式 (2.198)− 式 (2.199)

$$\rho\omega_{i,x-}u_{x-}dydz - \rho\left(\omega_{i,x-}u_{x-} + \left.\frac{\partial(\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz$$
$$= -\rho \left.\frac{\partial(\omega_i u)}{\partial x}\right|_{x-} dxdydz \tag{2.204}$$

y 軸に垂直面 式 (2.200)− 式 (2.201)

$$\rho\omega_{i,y-}v_{y-}dzdx - \rho\left(\omega_{i,y-}v_{y-} + \left.\frac{\partial(\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx$$
$$= -\rho \left.\frac{\partial(\omega_i v)}{\partial y}\right|_{y-} dxdydz \tag{2.205}$$

z 軸に垂直面 式 (2.202)− 式 (2.203)

$$\rho\omega_{i,z-}w_{z-}dxdy - \rho\left(\omega_{i,z-}w_{z-} + \left.\frac{\partial(\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy$$
$$= -\rho \left.\frac{\partial(\omega_i w)}{\partial z}\right|_{z-} dxdydz \tag{2.206}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.204)+ 式 (2.205)+ 式 (2.206) をとると、コントロールボリューム全体での対流による成分の質量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$\begin{aligned}
&-\rho\frac{\partial(\omega_i u)}{\partial x}dxdydz - \rho\frac{\partial(\omega_i v)}{\partial y}dxdydz - \rho\frac{\partial(\omega_i w)}{\partial z}dxdydz \\
&= -\rho\left(\omega_i\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \omega_i\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \omega_i}{\partial y} + \omega_i\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right)dxdydz \\
&= -\rho\left\{u\frac{\partial \omega_i}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_i}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_i}{\partial z} + \omega_i\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\text{式 (2.34) より 0}}\right\}dxdydz \\
&= -\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i dxdydz
\end{aligned} \tag{2.207}$$

2.5.3 拡散による成分の質量の出入

フィックの法則より、拡散係数を $D_i[m^2/s]$、面積ベクトルを $\boldsymbol{A}[m^2]$ とすると

$$-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_i\cdot\boldsymbol{A}$$

と表される。上式より、コントロールボリュームのそれぞれの面における拡散による成分 i の質量の出入を求める。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

x **軸に垂直** yz **面左**

$$-\rho_{x-}D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,x-}\cdot\boldsymbol{A}_{x-}=-\rho_{x-}D_i\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\\ \left.\dfrac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{x-}\\ \left.\dfrac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{x-}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dydz\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=-\rho_{x-}D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dydz \tag{2.208}$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$\begin{aligned}-\rho_{x+}D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,x+}\cdot\boldsymbol{A}_{x+}&=-\rho_{x+}D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x+}dydz\\&=-D_i\left(\rho_{x-}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial\frac{\partial\omega_i}{\partial x}}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz\\&=-D_i\left(\rho_{x-}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)\left(\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}+\left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-}dx\right)dydz\\&=-D_i\left(\rho_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}+\rho_{x-}\left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-}dx+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx\underbrace{+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-}dx^2}_{\text{十分に小さいため無視する}}\right)dydz\\&=-D_i\left(\rho_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}+\rho_{x-}\left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-}dx+\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}dx\right)dydz\end{aligned} \tag{2.209}$$

y **軸に垂直** zx **面下**

$$-\rho_{y-}D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,y-}\cdot\boldsymbol{A}_{y-}=-\rho_{y-}D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-}dzdx \tag{2.210}$$

y **軸に垂直** zx **面上**

$$\begin{aligned}-\rho_{y+}D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,y+}\cdot\boldsymbol{A}_{y+}&=-\rho_{y+}D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y+}dzdx\\&=-D_i\left(\rho_{y-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-}+\rho_{y-}\left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-}dy+\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-}dy\right)dzdx\end{aligned} \tag{2.211}$$

z **軸に垂直** xy **面後**

$$-\rho_{z-}D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,z-}\cdot\boldsymbol{A}_{z-}=-\rho_{z-}D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z-}dxdy \tag{2.212}$$

z **軸に垂直** xy **面前**

$$\begin{aligned}-\rho_{z+}D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,z+}\cdot\boldsymbol{A}_{z+}&=-\rho_{z+}D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z+}dxdy\\&=-D_i\left(\rho_{z-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z-}+\rho_{z-}\left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-}dz+\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{z-}\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z-}dz\right)dxdy\end{aligned} \tag{2.213}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が”拡散による成分の質量の出入”になる。展開後に微分の四乗となる項 $(dx^2dydz, dxdy^2dz, dxdydz^2)$ は十分に小さいため無視する。

x **軸に垂直面** 式 (2.208)− 式 (2.209)

$$-\rho D_i \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dydz + D_i\left(\rho_{x-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-} + \rho_{x-} \left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} dx + \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dx\right)dydz$$
$$= D_i\left(\rho \left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2}\right|_{x-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-}\right)dxdydz \tag{2.214}$$

y **軸に垂直面** 式 (2.210)− 式 (2.211)

$$-\rho D_i \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-} dzdx + D_i\left(\rho_{y-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-} + \rho_{y-} \left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-} dy + \left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-} dy\right)dzdx$$
$$= D_i\left(\rho \left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial y^2}\right|_{y-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{y-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{y-}\right)dxdydz \tag{2.215}$$

z **軸に垂直面** 式 (2.212)− 式 (2.213)

$$-\rho D_i \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z-} dxdy + D_i\left(\rho_{z-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z-} + \rho_{z-} \left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-} dz + \left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z-} dz\right)dxdy$$
$$= D_i\left(\rho \left.\frac{\partial^2\omega_i}{\partial z^2}\right|_{z-} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{z-} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{z-}\right)dxdydz \tag{2.216}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.214)+ 式 (2.215)+ 式 (2.216) をとると、コントロールボリューム全体での拡散による成分の質量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$D_i\left(\rho\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right)dxdydz + D_i\left(\rho\frac{\partial^2\omega_i}{\partial y^2} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right)dxdydz + D_i\left(\rho\frac{\partial^2\omega_i}{\partial z^2} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right)dxdydz$$
$$= D_i\left\{\rho\left(\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_i}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega_i}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega_i}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right\}dxdydz$$
$$= D_i\left(\rho\boldsymbol{\nabla}^2\omega_i + \boldsymbol{\nabla}\rho\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i\right)dxdydz$$
$$= D_i\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho\boldsymbol{\nabla}\omega_i\right)dxdydz \tag{2.217}$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

x **軸に垂直** yz **面左**

$$-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,x-}\cdot\boldsymbol{A}_{x-} = -\rho D_i\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-} \\ \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial y}\right|_{x-} \\ \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial z}\right|_{x-} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dydz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho D_i \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x-} dydz \tag{2.218}$$

x **軸に垂直** yz **面右**

$$-\rho D_i\boldsymbol{\nabla}\omega_{i,x+dx}\cdot\boldsymbol{A}_{x+} = -\rho D_i\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial x}\right|_{x+} dydz$$

$$= -\rho D_i \left(\left. \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right|_{x-} + \left. \frac{\partial \frac{\partial \omega_i}{\partial x}}{\partial x} \right|_{d} x \right) dydz$$

$$= -\rho D_i \left(\left. \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right|_{x-} + \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2} \right|_{x-} dx \right) dydz \tag{2.219}$$

y 軸に垂直 zx 面下

$$-\rho D_i \boldsymbol{\nabla} \omega_{i,y-} \cdot \boldsymbol{A}_{y-} = -\rho D_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right|_{y-} dzdx \tag{2.220}$$

y 軸に垂直 zx 面上

$$-\rho D_i \boldsymbol{\nabla} \omega_{i,y+dy} \cdot \boldsymbol{A}_{y+} = -\rho D_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right|_{y+} dzdx$$

$$= -\rho D_i \left(\left. \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right|_{y-} + \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} \right|_{y-} dy \right) dzdx \tag{2.221}$$

z 軸に垂直 xy 面後

$$-\rho D_i \boldsymbol{\nabla} \omega_{i,z-} \cdot \boldsymbol{A}_{z-} = -\rho D_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \right|_{z-} dxdy \tag{2.222}$$

z 軸に垂直 xy 面前

$$-\rho D_i \boldsymbol{\nabla} \omega_{i,z+dz} \cdot \boldsymbol{A}_{z+} = -\rho D_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \right|_{z+} dxdy$$

$$= -\rho D_i \left(\left. \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \right|_{z-} + \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2} \right|_{z-} dz \right) dxdy \tag{2.223}$$

xyz 軸に垂直な面それぞれ足し合わせる。その和が”拡散による成分の質量の出入”になる。

x 軸に垂直面 式 (2.218)− 式 (2.219)

$$-\rho D_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right|_{x-} dydz + \rho D_i \left(\left. \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right|_{x-} + \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2} \right|_{x-} dx \right) dydz = \rho D_i \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2} \right|_{x-} dxdydz \tag{2.224}$$

y 軸に垂直面 式 (2.220)− 式 (2.221)

$$-\rho D_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right|_{y-} dzdx + \rho D_i \left(\left. \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right|_{y-} + \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} \right|_{y-} dy \right) dzdx = \rho D_i \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} \right|_{y-} dxdydz \tag{2.225}$$

z 軸に垂直面 式 (2.222)− 式 (2.223)

$$-\rho D_i \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \right|_{z-} dxdy + \rho D_i \left(\left. \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \right|_{z-} + \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2} \right|_{z-} dz \right) dxdy = \rho D_i \left. \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2} \right|_{z-} dxdydz \tag{2.226}$$

xyz 軸での出入の総和式 (2.224)+ 式 (2.225)+ 式 (2.226) をとると、コントロールボリューム全体での拡散による成分の質量の出入が次式で求められる。ここで、コントロールボリュームの体積 ($dxdydz$) で括られている項の中での各境界面での区別はしない (2.1.7 節 p.12)。

$$\rho D_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2} dxdydz + \rho D_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} dxdydz + \rho D_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2} dxdydz$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho D_i \left(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial z^2} \right) dxdydz \\
&= \rho D_i \boldsymbol{\nabla}^2 \omega_i dxdydz \qquad (2.227)
\end{aligned}
$$

2.5.4 成分の質量保存式

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は変化する）

成分 i の質量の保存式は、式 (2.186)、式 (2.197)、式 (2.217) より

$$
\left(\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dxdydz = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \omega_i \boldsymbol{v}) dxdydz + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i \big) dxdydz
$$

両辺を $\rho dxdydz$ で割って、

$$
\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \omega_i \boldsymbol{v}) + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i \big) \qquad (2.228)
$$

ここで質量保存式の式 (2.33) より、

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v})
$$

これを次式のように、上式 (2.228) の左辺に代入し、右辺を一部展開する。

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \underbrace{- \omega_i \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v})}_{\text{右辺の項と釣合い消える}} &= \underbrace{- \omega_i \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v})}_{\text{左辺の項と釣合い消える}} - \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i \big) \\
\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} &= -\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho \boldsymbol{\nabla} \omega_i \big) \qquad (2.229)
\end{aligned}
$$

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m³] は一定）

成分 i の質量の保存式は、式 (2.187)、式 (2.207)、式 (2.227) より

$$
\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} dxdydz = -\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i dxdydz + \rho D_i \boldsymbol{\nabla}^2 \omega_i dxdydz
$$

両辺を $\rho dxdydz$ で割って、

$$
\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla}^2 \omega_i \qquad (2.230)
$$

2.6 一般形

それぞれの支配方程式を再度示す。

圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は変化する）

質量保存式 p. 15 の式 (2.33)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

運動量保存式 p. 32 の式 (2.85)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \frac{1}{3}\nu\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) + \nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\left\{\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial x}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big) + \boldsymbol{\nabla}^2 u\right\} \\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\left\{\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial y}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big) + \boldsymbol{\nabla}^2 v\right\} - g \\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\left\{\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial z}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big) + \boldsymbol{\nabla}^2 w\right\} \end{pmatrix}$$

エネルギー保存式 p. 53 の式 (2.182)

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_v \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T + k\boldsymbol{\nabla}^2 T - P\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$$

成分の質量保存式 p. 62 の式 (2.229)

$$\rho\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_i + D_i\boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\rho\boldsymbol{\nabla}\omega_i\big)$$

上式において物性値などの一定値（ν [m^2/s]、g [m/s^2]、c_p [J/(kg·K)]、k [W/(K·m)]、D_i [m^2/s]）を除くと未知数は ρ [kg/m^3]、u [m/s]、v [m/s]、w [m/s]、P [Pa]、T [K]、ω_i [kg/kg] の 7 つである。式の数が 6 つであるので、この式を解くには ρ [kg/m^3] と T [K]、P [Pa] の関係式（状態方程式）が必要となる。

非圧縮性流体（密度 ρ [kg/m^3] は一定）

質量保存式 p. 16 の式 (2.34)

$$0 = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$0 = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$$

運動量保存式 p. 32 の式 (2.87)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\boldsymbol{\nabla}^2 u \\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\boldsymbol{\nabla}^2 v - g \\ -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\boldsymbol{\nabla}^2 w \end{pmatrix}$$

エネルギー保存式 p. 54 の式 (2.185)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} T + a \boldsymbol{\nabla}^2 T$$

成分の質量保存式 p. 62 の式 (2.230)

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \omega_i + D_i \boldsymbol{\nabla}^2 \omega_i$$

上式において物性値などの一定値（ρ [kg/m^3]、ν [m^2/s]、g [m/s^2]、c_p [J/(kg·K)]、k [W/(K·m)]、D_i [m^2/s]）を除くと未知数は u [m/s]、v [m/s]、w [m/s]、P [Pa]、T [K]、ω_i [kg/kg] の 6 つである。式の数が 6 つであるので、式を解くことで未知数を求めることができる。

すべての保存式において

$$\text{非定常項} = \text{対流項} + \text{拡散項} + \text{生成項}$$

の形となっている。時間 t [s] で微分されている非定常項、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ [m/s] との内積をとっている対流項、拡散係数（単位はすべて m^2/s）と $\boldsymbol{\nabla}^2$ の項で表される拡散項、残りの項が生成項である。それぞれ質量あたりの物理量に対応している。運動量保存式では運動量 $m\boldsymbol{v}$ が質量あたりであるので $\boldsymbol{v}$ となる。エネルギー保存では非圧縮では内部エネルギー $c_p mT$ のみとなり比熱 c_p が一定であるので質量あたりは T となる。成分の質量 $m\omega_i$ の質量あたりは ω_i となる。また、質量保存では、質量 m の質量あたりであるので 1 であり、二階微分の項はゼロとなり消える。

付 録 A　付録

A.1　微分

A.1.1　微分の定義

関数 $y = f(x)$ について、導関数（y を x での微分）は以下のように定義される。

$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$

A.1.2　微分の計算

関数 $y = f(x)$ と関数 $z = g(x)$ の積を x で微分すると、微分の定義より以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d(yz)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{x + \Delta x - x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) - f(x)\}g(x+\Delta x) + f(x)\{g(x+\Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x) - f(x)\}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{g(x+\Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \frac{dy}{dx} z + y \frac{dz}{dx} \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}$$

左辺が y^2 の場合は、上式において $z = y$ とすれば以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d(y^2)}{dx} &= \frac{dy}{dx} y + y \frac{dy}{dx} \\
&= 2y \frac{dy}{dx} \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

上式で y ではなく、ベクトル $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ であると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d(\boldsymbol{v}^2)}{dt} &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) \\
&= \frac{d}{dt}(u^2 + v^2 + w^2) \\
&= \frac{d(u^2)}{dt} + \frac{d(v^2)}{dt} + \frac{d(w^2)}{dt} \\
&= 2u\frac{du}{dt} + 2v\frac{dv}{dt} + 2w\frac{dw}{dt} \\
&= 2\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right) \\
&= 2\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

関数 $a = f(x)$ と関数 $b = g(x)$ と関数 $c = h(x)$ の積の微分を式 (A.1) から求める。

$$\frac{d(abc)}{dx} = \frac{d(ab)(c)}{dx} = \frac{d(ab)}{x}c + ab\frac{dc}{dx} = \left(\frac{da}{dx}b + a\frac{db}{dx}\right)c + ab\frac{dc}{dx} = bc\frac{da}{dx} + ac\frac{db}{dx} + ab\frac{dc}{dx} \tag{A.4}$$

A.1.3 ▽の計算

$\boldsymbol{\nabla}$（ナブラ）はベクトルで次式で表される。

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

スカラーとの積、例えば温度 T との積は次式のようになる。

$$\boldsymbol{\nabla} T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ベクトルとの積（内積)、例えば速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ との積は次のようになる。ベクトルの内積なので、積はスカラー量となる。先に速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を示す。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

次にスカラーとベクトルの積との内積、例えばスカラーの密度 ρ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ では次のようになる。ベクトルとの内積なので、積はスカラー量となる。

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \\
&= \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&= \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho
\end{aligned}
$$

次にスカラー 2 つとベクトルの積との内積、例えばスカラーの密度 ρ とスカラーの温度 T と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ では次のようになる。ベクトルとの内積なので、積はスカラー量となる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho T\boldsymbol{v}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho T u \\ \rho T v \\ \rho T w \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial(\rho T u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho T v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho T w)}{\partial z} \\
&= \rho T\frac{\partial u}{\partial x} + \rho u\frac{\partial T}{\partial x} + Tu\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho T\frac{\partial v}{\partial y} + \rho v\frac{\partial T}{\partial y} + Tv\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho T\frac{\partial w}{\partial z} + \rho w\frac{\partial T}{\partial z} + Tw\frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&= \rho T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) + T\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \\
&= \rho T\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T + T\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho
\end{aligned}
$$

A.2 エネルギー保存式での計算の詳細

$$
\begin{aligned}
&\rho\boldsymbol{v}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w \end{pmatrix} \\
&= \rho\{u(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}u) + v(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}v) + w(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}w)\} \\
&= \rho\left\{u\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + v\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + w\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\rho\left\{2\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x} + uv\frac{\partial v}{\partial x} + uw\frac{\partial w}{\partial x} + uv\frac{\partial u}{\partial y} + v^2\frac{\partial v}{\partial y} + vw\frac{\partial w}{\partial y} + uw\frac{\partial u}{\partial z} + vw\frac{\partial v}{\partial z} + w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\rho\left\{u\left(2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 2w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + v\left(2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} + 2w\frac{\partial w}{\partial y}\right) + w\left(2u\frac{\partial u}{\partial z} + 2v\frac{\partial v}{\partial z} + 2w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\rho\left\{u\left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial v^2}{\partial z} + \frac{\partial w^2}{\partial z}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}\rho\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2+w^2) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(u^2+v^2+w^2) \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}^2)
\end{aligned}
$$

A.3 散逸エネルギー

2.4.4 節のように、コントロールボリュームでの時間あたりの仕事は面に作用する力と流速の内積で表される。

$$\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}=\tau\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

一項目 $\tau\dfrac{\partial u}{\partial y}$ は、応力と速度の変化量である。速度の変化量は垂直方向の変化なので、変形を表している。流体を変形させる仕事であるため、内部エネルギーに変換される。二項目 $u\dfrac{\partial \tau}{\partial y}$ は、応力の変化量と速度である。応力の変化で方向は変わらないため、流体を加速させる仕事となる。このように一項目は流体を変形させ粘性により熱となり内部エネルギーに変換される。これを散逸と呼ぶ。二項目は加速させる仕事で、運動エネルギーになる。

$$
\begin{aligned}
\Bigg(&-P\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial v}{\partial y}-P\frac{\partial w}{\partial z}-u\frac{\partial P}{\partial x}-v\frac{\partial P}{\partial y}-w\frac{\partial P}{\partial z}\\
&\underbrace{+\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{粘性により熱へと変化するエネルギーを表す散逸項}}\\
&\underbrace{+u\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}}_{\text{加速され運動エネルギーとなる項}}\Bigg)dxdydz
\end{aligned}
$$

散逸項と加速項の τ に、それぞれ次式を代入する。

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
\tau_{zx} &= \tau_{xz} = & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= -P+\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)=-P+\tau_{xx}\\
\sigma_y &= -P+\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)=-P+\tau_{yy}\\
\sigma_z &= -P+\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)=-P+\tau_{zz}
\end{aligned}
\right\}
$$

散逸項のみを表すと次式となる。

$$
\begin{aligned}
&\left(\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}\right)dxdydz\\
=&\left\{\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right.\\
&\left.+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}dxdydz\\
=&\mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right.\\
&-\frac{2}{3}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dxdydz\\
=&\mu\left[\frac{2}{3}\left\{3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+3\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+3\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right.\right.\\
&\left.-\frac{\partial u}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\\
&\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dxdydz\\
=&\mu\left[\frac{2}{3}\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-2\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dxdydz\\
=&\mu\left[\frac{2}{3}\left\{\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}_{\text{流体の伸縮}}\right\}\right.\\
&\left.\underbrace{+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}_{\text{流体の剪断変形（ずり変形）}}\right]dxdydz
\end{aligned}
$$

上式のように面に垂直な応力 τ_{xx}、τ_{yy}、τ_{zz} の入った項は流体の伸縮となる。流体が伸縮することで変形し内部エネルギーへと変換される。面に平行な応力 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} の入った項は流体の剪断変形となる。流体が剪断変形することで内部エネルギーへと変形される。流体の収縮や剪断変形については杉山らの教科書 [2] に分かりやすくまとめられている。

加速項のみを表すと次式となる。

$$
\begin{aligned}
&\left(u\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+v\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+w\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}+u\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+u\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)dxdydz\\
=&\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}+v\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}+w\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right\}\right.\\
&+\mu u\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}+\mu v\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\\
&\left.+\mu w\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}\right]dxdydz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\mu\Bigg[u\Bigg\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\}\\
&+v\Bigg\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\}\\
&+w\Bigg\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\}\Bigg]dxdydz\\
=&\mu\Bigg[u\Bigg\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\}\\
&+v\Bigg\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\}\\
&+w\Bigg\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\}\Bigg]dxdydz\\
=&\mu\Bigg[\Bigg\{\frac{1}{3}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg\}\\
&+\Bigg\{u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\Bigg\}\Bigg]dxdydz\\
=&\mu\left\{\frac{1}{3}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\right\}dxdydz
\end{aligned}
$$

散逸についての詳細は日野の教科書 [3] を参照すること。

参考文献

[1] 生井武史, 井上雅弘. 粘性流体の力学, 第 1 章. 理工学社, 1978.

[2] 杉山弘, 遠藤剛, 新井隆景. 流体力学, 第 2 章. 森北出版, 1995.

[3] 日野幹雄. 流体力学, 第 9 章. 朝倉書店, 1992.