平板の熱伝導の厳密解（発熱あり）

2023 年 5 月 18 日　椿 耕太郎

1　計算条件

ある一定温度の平板の両端の温度を T_∞ に変えた場合の平板内の温度分布を求める。平板は全面で均一に発熱しており（G [W/m^3] ）、また十分に長いとして厚さ方向の座標 x のみの一次元とする。座標 x は平板の中心を 0 とする。[脚注 1]

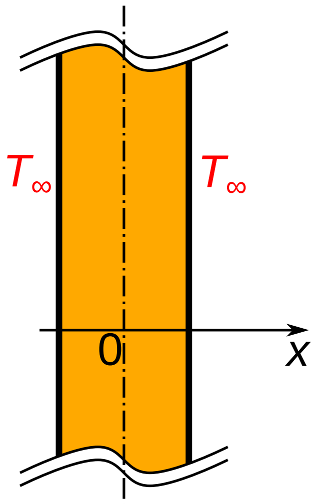

図 1　平板

支配方程式は一次元の非定常熱伝導方程式で次式である。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{G}{\rho c} \tag{2}$$

ここで、T は温度、t は経過時間、α は平板の熱拡散率、G は体積あたりの発熱量、ρ は密度、c は比熱である。

初期条件は T_0 で一定であり、次式で表される。

$$t = 0 \ : \ T = T_0 \tag{3}$$

[脚注 1] 平板の両端の温度が一定と見なせるのは、平板の両端に流体が十分に速い速度で流れている場合である。平板の内部の熱伝導率を k_p [W/(m K)] 、平板表面から流体への熱伝達率を h [W/(m^2 K)] 、平板厚さを $2L$ [m] として、次式で表される無次元数である Bi（ビオ数）が 1 よりも十分に大きければ、流体内での温度差はほぼなくなり平板表面温度が流体温度と等しいとみなせる。

$$Bi = \frac{2hL}{k_\mathrm{p}} \tag{1}$$

境界条件は板の中心で対称と端 $x = L$ で一定温度 $T = T_\infty$ である。

$$x = 0 \ : \ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$x = L \ : \ T = T_\infty \tag{5}$$

1.1 無次元化

式 (2) を解くために T を次式で無次元化する。これによって端での境界条件が 0 となる。

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

$$T = \theta(T_0 - T_\infty) + T_\infty \tag{6}$$

支配方程式 (2) の T を式 (6) により θ に置き換える

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\theta(T_0 - T_\infty) + T_\infty\} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\theta(T_0 - T_\infty) + T_\infty\} + \frac{G}{\rho c}$$

定数である T_0 と T_∞ は微分されることでゼロとなる

$$(T_0 - T_\infty)\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha (T_0 - T_\infty)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{G}{\rho c}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{G}{\rho c(T_0 - T_\infty)} \tag{7}$$

初期条件の式 (3) の T を式 (6) により θ に置き換える。

$$\theta(T_0 - T_\infty) + T_\infty = T_0$$

$$\theta = 1 \tag{8}$$

$x = 0$ での境界条件の式 (4) の T を式 (6) により θ に置き換える。

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\theta(T_0 - T_\infty) + T_\infty\} = 0$$

定数である T_0 と T_∞ は微分されることでゼロとなる

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

$x = L$ での境界条件の式 (5) の T を式 (6) により θ に置き換える。この境界条件がイコールゼロとなることで計算がしやすくなる。

$$\theta(T_0 - T_\infty) + T_\infty = T_\infty$$

$$\theta = 0 \tag{10}$$

1.2　無次元化した計算条件

無次元化した計算条件をまとめて示す。無次元化した支配方程式は式 (7) で求めたように以下の式である。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{G}{\rho c (T_0 - T_\infty)} \tag{7}$$

初期条件は式 (8) で求めたように次のように無次元化される。

$$t = 0 \ : \ \theta = 1 \tag{8}$$

境界条件は式 (9)、式 (10) で求めたように次のように無次元化される。

$$x = 0 \ : \ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

$$x = L \ : \ \theta = 0 \tag{10}$$

1.3　解きやすいように変形

式 (7) の $\dfrac{G}{\rho c (T_0 - T_\infty)}$ の項が解く上で邪魔なので、下記の ϕ を使って式 (7) を変形する。

$$\theta = \phi + \frac{(L^2 - x^2) G}{2 c \alpha \rho (T_0 - T_\infty)} \tag{11}$$

式 (7) を変形する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left\{\phi + \frac{(L^2 - x^2) G}{2 c \alpha \rho (T_0 - T_\infty)}\right\} &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\phi + \frac{(L^2 - x^2) G}{2 c \alpha \rho (T_0 - T_\infty)}\right\} + \frac{G}{\rho c (T_0 - T_\infty)} \\
\frac{\partial T'}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha \frac{(-2x) G}{2 c \alpha \rho (T_0 - T_\infty)} + \frac{G}{\rho c (T_0 - T_\infty)} \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{12}$$

初期条件の式 (8) の θ を式 (11) により ϕ に置き換える。

$$\begin{aligned}
\phi + \frac{(L^2 - x^2) G}{2 c \alpha \rho (T_0 - T_\infty)} &= 1 \\
\phi &= 1 - \frac{(L^2 - x^2) G}{2 c \alpha \rho (T_0 - T_\infty)}
\end{aligned} \tag{13}$$

$x = 0$ での境界条件の式 (9) の θ を式 (11) により ϕ に置き換える。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left\{\phi + \frac{(L^2 - 0^2) G}{2 c \alpha \rho (T_0 - T_\infty)}\right\} &= 0 \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{L^2 G}{2 c \alpha \rho (T_0 - T_\infty)} &= 0
\end{aligned}$$

定数である左辺第二項は微分されることでゼロとなる

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

$x = L$ での境界条件の式 (10) の θ を式 (11) により ϕ に置き換える。

$$\begin{aligned} \phi + \frac{(L^2 - L^2)G}{2c\alpha\rho(T_0 - T_\infty)} &= 0 \\ \phi &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

1.4 無次元化変形した計算条件

無次元化変形した計算条件をまとめて示す。無次元化変形した支配方程式は式 (12) で求めたように以下の式である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{12}$$

初期条件は式 (13) で求めたように次のように無次元化される。

$$t = 0 \ : \ \phi = 1 - \frac{(L^2 - x^2)G}{2c\alpha\rho(T_0 - T_\infty)} \tag{13}$$

境界条件は式 (14)、式 (15) で求めたように次のように無次元化される。

$$x = 0 \ : \ \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

$$x = L \ : \ \phi = 0 \tag{15}$$

2 無次元化変形した式を解く

2.1 変数の分離

無次元化変形した計算条件で式を解いていく。まず、次式のように求めたい解である x と t の関数 ϕ を、t のみの関数 ϕ_t と x のみの関数 ϕ_x の積で表す。

$$\phi = \phi_t \phi_x \tag{16}$$

式 (12) に上式 (16) を代入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_t \phi_x}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 \phi_t \phi_x}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\phi_x \frac{\mathrm{d}\phi_t}{\mathrm{d}t} = \alpha\phi_t \frac{\mathrm{d}^2\phi_x}{\mathrm{d}x^2}$$

それぞれの微分の分子は一変数関数になっているので偏微分から全微分に記号が変わる

左辺に t の関数、右辺に x の関数が来るようにわける

$$\frac{1}{\alpha\phi_t}\frac{\mathrm{d}\phi_t}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\phi_x}\frac{\mathrm{d}^2\phi_x}{\mathrm{d}x^2}$$

上式において左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数と分かれている。t と x の異なる独立変数は文字通り独立に変化するのでイコールで結ばれることはない。その関数も独立に変化するため、同じ変化をすることはないが、関数がそれぞれ同じ定数になるときにはイコールで結ぶことができる。ここでその定数を C と置き、左辺と右辺は双方 C と等しくなる。t のみとなった左辺と、x のみとなった右辺を、双方 C と等号で結び、それぞれ変形をする。

2.2 t のみの関数

左辺（t の関数）は次のように変形される。

$$\frac{1}{\alpha\phi_t}\frac{\mathrm{d}\phi_t}{\mathrm{d}t} = C$$
$$\frac{1}{\phi_t}\mathrm{d}\phi_t = \alpha C \mathrm{d}t$$
$$\int \frac{1}{\phi_t}\mathrm{d}\phi_t = \int \alpha C \mathrm{d}t$$
$$\log_e \phi_t = \alpha C t + C_1$$

C_1 は定数

$$e^{\alpha C t + C_1} = \phi_t$$

$$e^{\alpha C t} e^{C_1} = \phi_t$$

e^{C_1} は定数であるので $e^{C_1} = C_2$ と置く

$$C_2 e^{\alpha C t} = \phi_t$$

定数 C は 0 未満の負の値となっていなくてはならないので $C = -D^2$ と置き換える。$D \neq 0$ は定数。

$$C_2 e^{-\alpha D^2 t} = \phi_t \tag{17}$$

定数 C が 0 未満の負の値でなくてはならないのは、このモデルで時間が無限に進んだ場合に平板の温度は周囲温度に近づくだけで温度が発散することはなく、また、温度分布は必ず時間とともに変化するため定数にもならないためである。そのため、ϕ_t が発散したり、定数となることはないので、C は正の値やゼロを取ることはできない。

2.3 x のみの関数

右辺（x の関数）は次のように変形される。t のみの左辺と同様に $C=-D^2$ と等しいとする。

$$
\begin{aligned}
-D^2 &= \frac{1}{\phi_x}\frac{\mathrm{d}^2\phi_x}{\mathrm{d}x^2} \\
-D^2\phi_x &= \frac{\mathrm{d}^2\phi_x}{\mathrm{d}x^2} \\
&\text{両辺に } 2\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x} \text{ をかける} \\
-2D^2\phi_x\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x} &= 2\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2\phi_x}{\mathrm{d}x^2} \\
\frac{\mathrm{d}(-D^2\phi_x^2)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 \\
\mathrm{d}(-D^2\phi_x^2) &= \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 \\
\int \mathrm{d}(-D^2\phi_x^2) &= \int \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 \\
-D^2\phi_x^2 &= \left(\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + C_3 \\
&C_3 \text{ は定数} \\
\left(\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= -D^2\phi_x^2 - C_3 \\
\frac{\mathrm{d}\phi_x}{\mathrm{d}x} &= \pm\sqrt{-D^2\phi_x^2 - C_3} \\
\frac{1}{p\sqrt{-\phi_x^2 - \dfrac{C_3}{D^2}}}\mathrm{d}\phi_x &= \pm\mathrm{d}x \\
&-C_3/D^2 = C_4 \text{ と置く} \\
\frac{1}{\sqrt{-\phi_x^2 + C_4}}\mathrm{d}\phi_x &= \pm D\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{\sqrt{-\phi_x^2 + C_4}}\mathrm{d}\phi_x &= \int \pm D\mathrm{d}x \\
&\text{左辺の積分は付録 A.1 で詳細を示す} \\
\arcsin\frac{\phi_x}{\sqrt{C_4}} &= \pm(Dx + C_5) \\
\frac{\phi_x}{\sqrt{C_4}} &= \pm\sin(Dx + C_5) \\
\phi_x &= \pm\sqrt{C_4}\sin(Dx + C_5) \\
&\text{三角関数の加法定理} \\
\phi_x &= \pm\sqrt{C_4}(\sin Dx\cos C_5 + \cos Dx\sin C_5) \\
&\text{定数を置き直す } \pm\sqrt{C_4}\cos C_5 = C_6\text{、}\pm\sqrt{C_4}\sin C_5 = C_7 \\
\phi_x &= C_6\sin Dx + C_7\cos Dx
\end{aligned}
\tag{18}
$$

2.4　合わせる

式 (16) に式 (17) と式 (18) を代入する。

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_t\phi_x \\ &= C_2 e^{-\alpha D^2 t}(C_6 \sin Dx + C_7 \cos Dx) \\ &\qquad C_2C_6 = C_8\text{、}C_2C_7 = C_9 \text{ と置く} \\ &= e^{-\alpha D^2 t}(C_8 \sin Dx + C_9 \cos Dx)\end{aligned} \tag{19}$$

上式 (19) のように解である温度の無次元の式が求められた。

3　境界条件と初期条件から定数を求める

式 (19) のわかっていない定数 D、C_8、C_9 を二つの境界条件と初期条件から求めていく。

3.1　境界条件 1

まず以下に示す $x = 0$ での式 (14) の境界条件を用いる。

$$x = 0 \;:\; \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

境界条件が ϕ の微分値であるので、式 (19) を x で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{-\alpha D^2 t}(C_8 \sin Dx + C_9 \cos Dx)\right\} \\ &= e^{-\alpha D^2 t}\frac{\partial}{\partial x}(C_8 \sin Dx + C_9 \cos Dx) \\ &= e^{-\alpha D^2 t}(C_8 D \cos Dx - C_9 D \sin Dx)\end{aligned} \tag{20}$$

上式 (20) に $x = 0$ での境界条件である式 (14) を適用する。

$$\begin{aligned}0 &= e^{-\alpha D^2 t}(C_8 D \cos D \times 0 - C_9 D \sin D \times 0) \\ 0 &= e^{-\alpha D^2 t} C_8 D \\ C_8 &= 0\end{aligned} \tag{21}$$

求められた $C_8 = 0$（式 (21)）を ϕ の式 (19) へ代入すると次式のように未知の定数が一つ減る。

$$\phi = C_9 e^{-\alpha D^2 t} \cos Dx \tag{22}$$

3.2 境界条件 2

次に以下に示す $x=L$ での境界条件である式 (15) を用いる。

$$x = L \ : \ \phi = 0 \tag{15}$$

上式を ϕ の式 (22) に適用する。

$$0 = e^{-\alpha D^2 t} C_9 \cos DL$$

$C_9 = 0$ とすると式 (22) から $\phi = 0$ となり温度変化しないこととなってしまうため $C_9 \neq 0$

$$0 = \cos DL$$

上式が成り立つのは以下の条件である。

$$\begin{aligned} DL &= \cdots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \cdots \\ D &= \cdots, -\frac{3}{2}\frac{\pi}{L}, -\frac{1}{2}\frac{\pi}{L}, \frac{1}{2}\frac{\pi}{L}, \frac{3}{2}\frac{\pi}{L}, \frac{5}{2}\frac{\pi}{L}, \cdots \\ D &= \cdots, -3\frac{\pi}{2L}, -\frac{\pi}{2L}, \frac{\pi}{2L}, 3\frac{\pi}{2L}, 5\frac{\pi}{2L}, \cdots, (2n-1)\frac{\pi}{2L}, \cdots \quad (n\text{ は整数}) \end{aligned}$$

式 (22) に上式の D を代入すると（見やすいように e の乗数を exp で表す）、二つの境界条件を満たす ϕ が次のように複数導かれる。

$$\begin{aligned} \phi = &\cdots, C_9 \exp\left\{-\alpha\left(-3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(-3\frac{\pi x}{2L}\right), C_9 \exp\left\{-\alpha\left(-\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(-\frac{\pi x}{2L}\right), \\ &C_9 \exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), C_9 \exp\left\{-\alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(3\frac{\pi x}{2L}\right), \\ &C_9 \exp\left\{-\alpha\left(5\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(5\frac{\pi x}{2L}\right), \cdots, \\ &C_9 \exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2 t\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}, \cdots, \end{aligned}$$

上式の解のうち (2n - 1) にあたる数字が負である解は、(2n - 1) が正となる解で同じものがある。例えば (2n - 1) にあたる数字が-3 である $C_9 \exp\left\{-\alpha\left(-3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(-3\frac{\pi x}{2L}\right)$ と 3 である $C_9 \exp\left\{-\alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(3\frac{\pi x}{2L}\right)$ は exp の中は 2 乗であるため同じであり、cos は 0 で対称な関数であるため cos の部分も同じである。このようにマイナス側はプラス側と同じ内容を示しているので、重なっているマイナス側を消す。

$$\begin{aligned} \phi = &C_9 \exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), C_9 \exp\left\{-\alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(3\frac{\pi x}{2L}\right), \\ &C_9 \exp\left\{-\alpha\left(5\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(5\frac{\pi x}{2L}\right), \\ &\cdots, C_9 \exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2 t\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}, \cdots \end{aligned} \tag{23}$$

支配方程式である式 (7) が線形（同次形の線形微分方程式）であり、式 (23) のそれぞれを定数倍しても、足し合わせても解となること（A.2）を利用して、それぞれに定数 D_n をかけ足し合わせて一つの解として表す（このとき定数 C_9 は D_n に含まれる）。

$$\begin{aligned}\phi =&D_1\exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)+D_2\exp\left\{-\alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(3\frac{\pi x}{2L}\right)\\ &+D_3\exp\left\{-\alpha\left(5\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(5\frac{\pi x}{2L}\right)\\ &+\cdots+D_n\exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2 t\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}+\cdots\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}D_n\exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2 t\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\end{aligned}\tag{24}$$

3.3 初期条件

下記の初期条件の式 (13) に合うように式 (24) 中の未知の定数を決めたい。

$$t=0\ :\ \phi=1-\frac{(L^2-x^2)G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\tag{13}$$

上式の初期条件を式 (24) に適用する。三角関数の直交性と呼ばれる性質を利用する。

$$\begin{aligned}1-\frac{(L^2-x^2)G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}&=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2\times 0\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\\ 1-\frac{L^2G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}+\frac{G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}x^2&=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\end{aligned}$$

両辺に $\cos\left\{(2m-1)\dfrac{\pi x}{2L}\right\}$ をかけ、0 から L で積分する（m は任意の自然数）が、式が長くなるため、左辺と右辺に分けて変形をしていく。

左辺は次のように変形される。

$$\begin{aligned}&\int_0^L\left\{1-\frac{L^2G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}+\frac{G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}x^2\right\}\cos\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\mathrm{d}x=\text{左辺}\\ &\left\{1-\frac{L^2G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\right\}\int_0^L\cos\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\mathrm{d}x+\frac{G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\int_0^L x^2\cos\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\mathrm{d}x=\\ &\left\{1-\frac{L^2G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\right\}\left[\frac{2L}{\pi(2m-1)}\sin\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\right]_0^L\\ &+\frac{G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\left[\frac{2L}{\pi(2m-1)}x^2\sin\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\right]_0^L-\int_0^L\frac{2L}{\pi(2m-1)}2x\sin\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\mathrm{d}x\right)=\\ &\left\{1-\frac{L^2G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\right\}\frac{2L}{\pi(2m-1)}\sin\left\{(2m-1)\frac{\pi}{2}\right\}+\frac{G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}L^2\sin\left\{(2m-1)\frac{\pi}{2}\right\}\right.\\ &\left.+\left[\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2 2x\cos\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\right]_0^L-2\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2\int_0^L\cos\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\mathrm{d}x\right)=\\ &\left\{1-\frac{L^2G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\right\}\frac{2L}{\pi(2m-1)}(-1)^{m+1}+\frac{G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}L^2(-1)^{m+1}\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2 2L\cos\left\{(2m-1)\frac{\pi}{2}\right\} - 2\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^3 \left[\sin\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\right]_0^L\Bigg) = \\
&\left\{1-\frac{L^2G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\right\}\frac{2L}{\pi(2m-1)}(-1)^{m+1} + \frac{G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\Bigg(\frac{2L}{\pi(2m-1)}L^2(-1)^{m+1} \\
&\qquad -2\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^3(-1)^{m+1}\Bigg) = \\
&\frac{2L}{\pi(2m-1)}(-1)^{m+1}\left[1-\frac{L^2G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)} + \frac{G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(L^2 - 2\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2\right)\right] = \\
&\frac{2L}{\pi(2m-1)}(-1)^{m+1}\left[1-\frac{G}{c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2\right] =
\end{aligned} \tag{25}
$$

右辺は次のように変形される。

$$
\text{右辺} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L D_n \cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\cos\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\mathrm{d}x
$$

三角関数の積和の公式より

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L D_n\frac{1}{2}\left[\cos\left\{(2n-1+2m-1)\frac{\pi x}{2L}\right\} + \cos\left\{(2n-1-2m+1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\right]\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{1}{2}\left[\frac{L}{\pi(n+m-1)}\sin\left\{(n+m-1)\frac{\pi x}{L}\right\} + \frac{L}{\pi(n-m)}\sin\left\{(n-m)\frac{\pi x}{L}\right\}\right]_0^L \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{1}{2}\left[\frac{L}{\pi(n+m-1)}\sin\{(n+m-1)\pi\} + \frac{L}{\pi(n-m)}\sin\{(n-m)\pi\}\right]
\end{aligned}
$$

右辺の括弧の中の一項目は n、m がともに自然数で $\sin\{(n+m-1)\pi\}=0$ であるため 0 となる

$$
= \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{L}{2}\frac{\sin\{(n-m)\pi\}}{(n-m)\pi}
$$

右辺の n と m が異なる値であるときには $\sin\{(n-m)\pi\} = 0$ であるため、その項は 0 となり m と異なる n の項はすべて消える
n と m が同じ値であるときには $\lim_{x\to 0}\sin x/x = 1$ であることから 1 となる

$$
= D_m\frac{L}{2} \tag{26}
$$

左辺（式 (25)） = 右辺（式 (26)）に戻す。

$$
\begin{aligned}
\frac{2L}{\pi(2m-1)}(-1)^{m+1}\left[1-\frac{G}{c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2\right] &= D_m\frac{L}{2} \\
\frac{4}{\pi(2m-1)}(-1)^{m+1}\left[1-\frac{G}{c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2\right] &= D_m
\end{aligned}
$$

この求まった定数 D_m を D_n として式 (24) に代入すると変形した無次元温度が求まる。

$$
\phi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}(-1)^{n+1}\left[1-\frac{G}{c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\frac{2L}{\pi(2n-1)}\right)^2\right]\exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2 t\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\} \tag{27}
$$

4　解

式 (27) で求めた変形した無次元温度を式 (11) で無次元温度に戻す。解として次式の θ の式を求めることができた。

$$\begin{aligned}\theta =&\frac{(L^2-x^2)G}{2c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}(-1)^{n+1}\left[1-\frac{G}{c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\frac{2L}{\pi(2n-1)}\right)^2\right]\exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2 t\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\end{aligned} \tag{28}$$

さらに式 (6) で θ から温度を求める

$$\begin{aligned}T =&\frac{(L^2-x^2)G}{2c\alpha\rho}+T_\infty\\&+(T_0-T_\infty)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}(-1)^{n+1}\left[1-\frac{G}{c\alpha\rho(T_0-T_\infty)}\left(\frac{2L}{\pi(2n-1)}\right)^2\right]\exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2 t\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}\end{aligned} \tag{29}$$

5　謝辞

これは学生とのゼミの内容をまとめたものです。参加してくれた古川絵礼奈さん、ありがとうございました。

A　付録

A.1　積分の詳細

$\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+C}}\mathrm{d}x$（C は定数）を求める。

$$\begin{aligned}&\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+C}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\sqrt{C}\sqrt{-\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right)^2+1}}\mathrm{d}x\\&\quad x/\sqrt{C}=\sin f\ \text{と置く}\\&=\int\frac{1}{\sqrt{C}\sqrt{-\sin^2 f+1}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\sqrt{C}\sqrt{\cos^2 f}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\sqrt{C}\cos f}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{30}$$

式の変形途中でおいた $x/\sqrt{C} = \sin f$ を変形する。

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{C}} &= \sin f \\
&\text{f で微分する} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\frac{x}{\sqrt{C}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\sin f \\
\frac{1}{\sqrt{C}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f} &= \cos f \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f} &= \sqrt{C}\cos f \\
&\text{分子と分母を入れ替える} \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\sqrt{C}\cos f} \\
\mathrm{d}f &= \frac{1}{\sqrt{C}\cos f}\mathrm{d}x \qquad (31)
\end{aligned}
$$

上式 (30) を前の式 (31) へ代入する。また、関数 f は sin の逆関数 arcsin で次のように表される $f = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{C}}$。

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + C}}\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{d}f \\
&= f + C_1 \\
&= \arcsin\frac{x}{\sqrt{C}} + C_1 \qquad (32)
\end{aligned}
$$

A.2 解の重ね合わせ

式 (23) のそれぞれを定数倍しても、足し合わせても式 (7) の解となることを、例をあげて確認してみる。

$$
\frac{\partial\phi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \qquad (7)
$$

$$
\begin{aligned}
\phi =& C_9\exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), C_9\exp\left\{-\alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(3\frac{\pi x}{2L}\right), \\
& C_9\exp\left\{-\alpha\left(5\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(5\frac{\pi x}{2L}\right), \cdots, \\
& C_9\exp\left[-\alpha\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2L}\right\}^2 t\right]\cos\left\{(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right\}, \cdots, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

まず、式 (7) の解の式 (23) の中の一つである $\phi = C_9\exp\left\{-\alpha\left(\dfrac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2L}\right)$ が当然ではあるが式 (7) を

満たすことを確認しよう。式 (7) の左辺と右辺の ϕ にそれぞれ代入して同じとなるか確認する。

$$左辺 = \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 C_9 \exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{33}$$

$$右辺 = \alpha\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 C_9 \exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{34}$$

このように左辺と右辺が等しく式 (7) を満たしていることがわかる。次に式 (23) の中の二つの解に定数をかけ足した $\phi = D_1 \exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + D_2 \exp\left\{-\alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(3\frac{\pi x}{2L}\right)$ が同じように式 (7) を満たすか確認する。

$$左辺 = \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 D_1 \exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - \alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 D_1 \exp\left\{-\alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(3\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{35}$$

$$右辺 = \alpha\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 D_1 \exp\left\{-\alpha\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - \alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 D_1 \exp\left\{-\alpha\left(3\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\}\cos\left(3\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{36}$$

式 (23) の中の解を定数倍して足し合わせても解となる一例を示せた。